

SÉRIE A, N° 3035
N° D'ORDRE 3907

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

PHAM TAN HOANG

1^{ère} THÈSE. — LA MÉTHODE DES SINGULARITÉS POUR LES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT
EN RELATIVITÉ GÉNÉRALE ET EN THÉORIE DU CHAMP UNIFIÉ.

2^{ème} THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 1^{er} Juin 1957, devant la Commission d'examen

M. G. DARMOIS	Président.
M ^{me} M. A. TONNELAT	} Examinateurs.
M. A. LICHNEROWICZ	



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41551528_0016

SÉRIE A, N° 3035
N° D'ORDRE 3907

THÈSES

PRÉSENTÉES

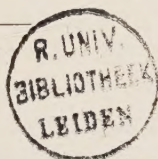
A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

PHAM TAN HOANG



1^{ère} THÈSE. — LA MÉTHODE DES SINGULARITÉS POUR LES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT
EN RELATIVITÉ GÉNÉRALE ET EN THÉORIE DU CHAMP UNIFIÉ.

2^{ème} THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 1^{er} Juin 1957, devant la Commission d'examen

M. G. DARMOIS	Président.
M ^{me} M. A. TONNELAT	} Examineurs.
M. A. LICHNEROWICZ	

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Doyen J. PÉRÈS

PROFESSEURS

G. JULIA T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	WIEMANN T	Chimie organique structurale.
FOCH T	Mécanique physique et Expérimentale.	JACQUINOT T	Spectroscopie et Physique céleste.
PAUTHENIER T	Electrotechnique générale.	VASSY T	Physique de l'atmosphère.
DE BROGLIE T	Théories physiques.	DESTOUCHES T	Théories physiques.
PRENANT T	Anatomie et Histologie comparées.	M. PRUVOST T	Géologie.
GARNIER T	Géométrie supérieure.	AMIEL T	Chimie (P.C.B.).
PÉRÈS T	Mécanique des fluides et applications.	HOCART T	Minéralogie.
LAUGIER T	Physiologie générale.	J.-P. MATHIEU T	Physique (P.C.B.).
M. CURIE T	Physique (P.C.B.).	COUTEAUX T	Biologie animale (P.C.B.).
BARRABÉ T	Géologie structurale et Géologie appliquée.	MAY T	Biologie animale (P.C.B.).
G. DARMOIS T	Calcul des probabilités et Physique mathématique.	CHOQUET T	Calcul différentiel et intégral.
J. BOURCART T	Géographie physique et Géologie dynamique.	FELDMANN T	Biologie (P.C.B.).
PLANTEFOL T	Botanique.	GUINIER T	Physique (P.C.B.).
GRASSE T	Evolution des êtres organisés.	JOST T	Biologie (P.C.B.).
PRÉVOST T	Chimie organique.	FORTET T	Calcul des probabilités.
BOULIGAND T	Application de l'analyse à la Géométrie.	SCHWARTZ T	Méthode mathématique de la Physique.
CHAUDRON T	Chimie appliquée.	CHOUARD T	Physiologie végétale.
WYART T	Minéralogie.	MALAVARD T	Aviation.
TEISSIER T	Zoologie.	BRELOT T	Calcul différentiel.
MANGENOT T	Biologie Végétale.	NORMANT T	Chimie (P.C.B.).
P. AUGER T	Physique quantique et relativité.	BÉNARD T	Chimie (P.C.B.).
MONNIER T	Physiologie des fonctions.	BUVAT T	Botanique (E.N.S.).
PIVETEAU T	Géologie.	DUGUE T	Statistiques mathématiques.
ROCARD T	Physique (E.N.S.).	GÉLOSO T	Chimie (S.P.C.N.).
H. CARTAN T	Mathématiques (E.N.S.).	SOULAIRAC T	Psychophysiologie.
LAFFITTE T	Chimie générale.	ULRICH T	Physiologie végétale.
FAVARD T	Mécanique générale.	MARÉCHAL T	Optique théorique et appliquée.
COULOMB T	Physique du Globe.	KIRRMANN T	Théories chimiques.
Mlle COUSIN T	Biologie animale (P.C.B.).	CHADEFAUD T	Botanique.
CHRÉTIEN T	Chimie minérale.	DESTRIAU T	Physique (M.P.C.).
P. DRACH T	Zoologie.	Mlle LE BRETON T	Physiologie générale.
KASTLER T	Physique.	SALEM T	Mathématiques générales.
EPHRUSSI T	Génétique.	LELONG T	Mathématiques générales.
WURMSER T	Biologie physico-chimique.	DEVILLERS T	Anatomie et Histologie comparées.
RIVIÈRE T	Géologie (S.P.C.N.).	EHRESMANN T	Topologie algébrique.
GAUTHERET T	Biologie végétale (P.C.B.).	FRANÇON T	Physique (M.P.C.).
LUCAS T	Recherches physiques.	GLANGEAUD T	Géographie physique et géologie dynamique.
A. THOMAS T	Biologie cellulaire.	GODEMENT T	Mathématiques (M.P.C.).
ARNULF T	Optique appliquée.	PISOT T	Calcul des probabilités.
M. MORAND T	Physique.	ROCH (E.) T	Géologie.
SOLELLET T	Physique.	SCHATZMANN T	Astrophysique.
FORTIER T	Mécanique expérimentale des fluides.	THERMIER T	Paléontologie stratigraphique.
DANJON T	Astronomie.	ZAMANSKY T	Mathématiques générales.
LAPORTE T	Physique générale et radio-activité.	JOLIOT T	Physique nucléaire et radio-activité.
JANET T	Mécanique analytique et Mécanique céleste.	LENNUIER T	Physique (P.C.B.).
PETIT T	Biologie maritime.	RIZET T	Génétique.
QUENEY T	Météorologie et dynamique atmosphérique.	Mme TONNELAT T	Théories physiques.
GALLIEN T	Embryologie.	DIXMIER T	Mathématiques (M.P.C.).
EICHORN T	Biologie végétale (P.C.B.).	SOUCHAY T	Chimie (P.C.B.).
DE CUGNAC T	Biologie végétale (P.C.B.).	AIGRAIN T	Physique (P.C.B.).
Mlle CAUCHOIS T	Chimie physique.	BRUSSET T	Chimie (P.C.B.).
THELLIER T	Physique du Globe.	M. LÉVY T	Physique théorique.
L'HÉRITIER T	Génétique.	LENORMANT T	Physiologie.
GRIVET T	Radioélectrité.	Mme CHAIX T	Chimie biologique.
PONCIN T	Mécanique des fluides.	Mme HUREL-PY T	Biologie végétale (P.C.B.).
DUBREIL T	Arithmétique et théorie des nombres.	PIAUX T	Chimie (P.C.B.).
QUELET T	Chimie organique.	BRUN T	Mécanique expérimentale des fluides.
CAGNIARD T	Géophysique appliquée.	LEDERER T	Chimie biologique.
CHAMPETIER T	Chimie macromoléculaire.	Mme DUBREIL T	
CUVILLIER T	Géologie structurale et Géologie appliquée.	JACOTIN T	Mathématiques.
JUNG T	Pétrographie.	Mme LELONG-FERRAND T	Mathématiques (E.N.S.).
TRILLAT T	Microscopie et diffraction électronique.	BELLAIR T	Géologie (S.P.C.N.).
		COTTE T	Physique (M.P.C.).
		DUBOIS J. T	Chimie.
		LAMOTTE T	Zoologie.
		LE ROLLAND T	Mécanique des fluides.
		MICHEL T	Chimie (P.C.B.).

Secrétaire Général..... CH. MONIER

LA MÉTHODE DES SINGULARITÉS POUR LES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT EN RELATIVITÉ GÉNÉRALE ET EN THÉORIE DU CHAMP UNIFIÉ

par PHAM TAN HOANG (Paris)

INTRODUCTION

Ce travail concerne principalement la détermination des équations du mouvement par la méthode des singularités. Il est consacré d'une part à l'exposé de cette méthode, d'autre part à son application à la relativité générale et à son extension à la théorie du champ unifié. En liaison avec le problème du mouvement, nous essayons de préciser les grandeurs que l'on peut considérer comme métrique et comme champ dans la théorie du champ unifié. Nous étudions aussi les conditions de conservation pour le tenseur d'impulsion-énergie que l'on extrait des équations du champ.

La propriété importante de l'interdépendance entre équations de champ et équations de mouvement en relativité générale a été montrée par EINSTEIN et GROMMER en 1927. Ces auteurs établirent que le principe des géodésiques est une conséquence des équations du champ. Plus tard, le problème du mouvement pour des masses finies a été résolu par EINSTEIN, INFELD et HOFFMANN (1938) et indépendamment par FOCK (1939). On conçoit que le champ extérieur et le champ intérieur soient tous les deux capables de nous renseigner sur l'état de mouvement des masses, puisque la présence des masses modifie la structure de l'univers à l'intérieur des tubes d'univers comme à l'extérieur. En fait les deux points de vue ont été considérés : EINSTEIN [25] et ses collaborateurs utilisent les équations du cas extérieur, la matière étant représentée par les singularités ponctuelles du champ extérieur ; la méthode de FOCK [15] au contraire est basée sur les équations du cas intérieur avec la représentation explicite de la matière par un tenseur d'impulsion-énergie. Cependant, si les deux méthodes présentent certainement des relations, elles ne peuvent probablement pas

se ramener tout à fait l'une à l'autre. Car le problème du prolongement de l'intérieur vers l'extérieur existe et il est unique ; mais cela n'est pas vrai pour le problème inverse : un ds^2 extérieur étant donné, il peut ne correspondre à aucune distribution énergétique, ou au contraire à une infinité. On peut dire que la méthode du tenseur d'énergie, la plus directe, est aussi la plus claire.

A) Le développement de la méthode du tenseur d'énergie a été amorcé par les travaux de G. DARMOIS et de Th. de DONDER. Le calcul des solutions nécessite des approximations qui ont été effectuées notamment dans les travaux de V. A. FOCK [15], de PETROVA [21], d'A. PAPAPETROU [20] et de Mme F. HENNEQUIN [17].

Tous ces auteurs utilisent des coordonnées isothermes qui apportent une indispensable simplification dans les équations approchées. Ils prennent comme paramètre de développement $1/c^2$ (c , vitesse de la lumière) et obtiennent des développements limités des solutions. FOCK et PETROVA forment alors les équations de mouvement en écrivant que les conditions d'isothermie sont vérifiées pour la solution approchée trouvée. PAPAPETROU les tire des identités de conservation. On constate que les résultats sont équivalents à l'approximation obtenue, sans préciser les raisons profondes de cette équivalence. Mme HENNEQUIN a montré que la vérification des identités de conservation à l'ordre p entraîne automatiquement la validité des conditions d'isothermie à cette même approximation. En raison des identités de conservation il existe donc une équivalence entre les conditions d'isothermie et les équations de mouvement pour une solution approchée d'ordre donné.

La méthode du tenseur d'énergie a été appliquée récemment par L. INFELD [18] à un modèle d'univers (qu'on peut considérer comme un cas limite) dans lequel les domaines intérieurs se réduisent à des lignes d'univers, le long de chacune d'elles le tenseur $T_{\alpha\beta}$ ayant une valeur proportionnelle à la distribution de DIRAC. L. INFELD pense que sa méthode permet de faire la jonction entre les deux points de vue du champ intérieur et du champ extérieur. En tout cas, les calculs des équations de mouvement sont grandement simplifiés.

B) Les théories précédentes exigent l'introduction du tenseur d'énergie. Pourtant EINSTEIN n'a admis la présence de ce tenseur qu'avec réticence : Il a toujours pensé que le développement le plus souhaitable de la relativité générale devrait éliminer des équations du champ le tenseur $T_{\alpha\beta}$ relatif aux sources, tenseur dont l'origine phénoménologique lui semble inconciliable avec le principe d'une théorie du champ pur.

EINSTEIN [25] et ses collaborateurs ont donc cherché à déduire les équations de mouvement d'une particule matérielle neutre des équations du champ

$$G_{\alpha\beta} = 0,$$

valables en dehors des singularités ou, plus exactement, en dehors de surfaces entourant les singularités, qui sont ponctuelles par hypothèse. Ils prennent pour paramètre de développement λ^2 (qui n'est autre que $1/c^2$) et font les approximations dans le cas quasi-statique.

Ces auteurs montrent que dans la détermination des champs par approximation, l'intégrabilité des équations du champ n'est assurée que sous certaines conditions, à partir desquelles les équations de mouvement peuvent précisément s'obtenir. Ces conditions consistent dans l'annulation, d'après les équations du champ, de certaines intégrales. Celles-ci portent sur une combinaison assez arbitraire du tenseur de RICCI; elles sont étendues à une surface fermée à deux dimensions entourant une singularité.

Cette méthode est souvent appelée « méthode des singularités ». En réalité, il s'agit du cas limite de modèle d'univers dont nous avons parlé tout à l'heure.

L. INFELD et P. R. WALLACE [29] ont étudié par la même méthode le cas matière chargée en ajoutant au second membre un tenseur électromagnétique de type classique, la matière restant représentée par des singularités du champ.

Enfin la méthode des singularités a été appliquée, sans justification, à la théorie unitaire par L. INFELD [35] et J. CALLAWAY [34]. Ces auteurs arrivent au résultat négatif que le mouvement des particules chargées n'est pas influencé par le champ électromagnétique.

* * *

En nous inspirant des travaux d'EINSTEIN et ses collaborateurs, nous exposerons une méthode générale, basée sur les équations du cas extérieur, pour la détermination des équations de mouvement. Pour plus de généralité et pour l'extension éventuelle de la méthode à la théorie pentadimensionnelle du champ unifié, nous considérons une variété différentiable à n dimensions V_n , de classe $(C^2, C^4$ par morceaux), sur laquelle est définie une métrique riemannienne partout de type hyperbolique normal. La structure géométrique de cette variété est supposée déterminée par des équations analogues aux équations d'EINSTEIN de la relativité générale.

Notre point de départ est alors le suivant: Nous considérons le tenseur conservatif $S_{\alpha\beta}$ et les équations du cas extérieur:

$$S_{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha, \beta = 0, 1, \dots, n-1).$$

Sur une section W_{n-1} déterminée (section $x^0 = \text{const.}$ de V_n , x^0 désignant la variable temporelle), le tenseur $S_{\alpha\beta}$ induit un vecteur $\vec{S}_{(\alpha)}$ de composantes $S_{(\alpha)i}$ ($i = 1, \dots, n-1$), l'indice α ayant une valeur fixée quelconque.

Nous supposons que les domaines intérieurs de V_n sont représentés dans W_{n-1} par des domaines à $(n-1)$ dimensions connexes et bornés. Nous prenons un domaine singulier déterminé de W_{n-1} ; nous considérons des $(n-1)$ -champs d'intégration quelconques de W_{n-1} qui contiennent ce domaine singulier et nous étudions le flux du vecteur $\vec{S}_{(\alpha)}$ à travers la frontière d'un tel $(n-1)$ -champ.

L'approximation des équations du champ permet d'obtenir les équations de mouvement. Il faut admettre des développements limités du tenseur métrique. A l'aide des identités de conservation du tenseur $S_{\alpha\beta}$ et de l'hypothèse quasi-statique, nous montrons que le flux du vecteur $\vec{S}_{(\alpha)}$ possède les deux propriétés suivantes, qui semblent essentielles dans la méthode. Le flux de $\vec{S}_{(\alpha)}$ d'ordre m :

- a une valeur indépendante du choix du $(n-1)$ -champ d'intégration ;
- ne dépend que des champs d'ordre $(m-1)$.

Grâce à ces deux propriétés, les équations suivantes :

$$(i) \quad \text{flux } \vec{S}_{(\alpha)} = 0,$$

au lieu d'être de simples conséquences des équations du champ, imposent réellement des conditions à la solution approchée obtenue. De là vient la possibilité de déduire les équations du mouvement des équations (i).

La méthode précédente s'étend de façon immédiate à la théorie du champ unifié d'EINSTEIN-SCHRÖDINGER. A la place du tenseur $S_{\alpha\beta}$, il suffit de considérer maintenant le tenseur $M_{\alpha\beta}^{\lambda}$ qui entre dans la formation des identités de conservation en théorie du champ unifié. L'étude d'une intégrale portant sur une forme différentielle extérieure définie à partir du tenseur $M_{\alpha\beta}^{\lambda}$, montre que cette intégrale possède aussi les deux propriétés fondamentales du flux de $\vec{S}_{(\alpha)}$. On en déduit que les équations qui expriment la nullité de cette intégrale peuvent servir d'équations de définition du mouvement dans la théorie du champ unifié.

Le sommaire de ce travail est donc le suivant.

Le chapitre I rappelle les notions fondamentales de relativité générale et précise les notations utilisées.

Au chapitre II, nous étudions la déduction des équations de mouvement à partir des équations du cas extérieur. Après avoir exposé la méthode dans le cas d'une variété à n dimensions, nous l'appliquons à la relativité générale. Les coordonnées isothermes sont employées en raison de leur signification physique importante. Les calculs sont effectués dans le cas simple

du problème de N corps (singularités du champ ponctuelles et à symétrie sphérique). On peut alors prendre comme solution de l'équation de LAPLACE la solution élémentaire $1/r$. A la seconde approximation, nous obtenons le même résultat que celui d'EINSTEIN et de ses collaborateurs.

Les chapitres suivants sont consacrés à la théorie du champ unifié d'EINSTEIN-SCHRÖDINGER. Nous commençons par rappeler quelques notions sur les variétés à connexion affine, et la déduction des équations du champ par le principe variationnel. Puis nous faisons quelques considérations au sujet du tenseur métrique et d'un tenseur rotationnel lié à $g^{\alpha\beta}$. Le problème de CAUCHY conduit à penser que le tenseur métrique est défini par $g^{\alpha\beta}$ à un invariant près $\frac{1}{J}$. Nous montrons comment les conditions d'isothermie

permettent de préciser la valeur de cet invariant $\left(\frac{1}{J} = \sqrt{h/g}, \frac{1}{h} = \det(g^{\alpha\beta}) \right)$.

Dans la métrique ainsi déterminée, le tenseur $q^{\alpha\beta} = \frac{1}{J} g^{\alpha\beta}$ a une signification simple : il est l'adjoint d'un tenseur rotationnel. Ces rappels et ces développements font l'objet du chapitre III.

L'extension de la méthode des singularités à la théorie du champ unifié est effectuée dans le chapitre IV. Le principe de la méthode est exposé, et le rôle de la partie antisymétrique $R_{\alpha\beta}$ se trouve éclairci. On constate que la théorie du champ unifié ne donne que les équations de mouvement des particules non chargées. Toutefois il convient de noter que cette conclusion négative n'est pas rigoureuse, car elle dépend en partie des approximations quasi-statiques habituellement considérées. Ce chapitre contient en outre une étude du potentiel électromagnétique dans l'hypothèse quasi-statique. Cette étude fournit directement une solution des équations des champs anti-symétriques. Elle nous permet aussi de montrer que l'interprétation du tenseur $q_{\alpha\beta}$ comme tenseur champ électromagnétique est impossible au delà de la première approximation.

Le problème du tenseur d'énergie est esquissé au chapitre IV qui termine notre travail. Dans ce domaine il semble que rien de valable n'ait encore été fait. Nous montrons comment les identités de conservation pour le tenseur d'énergie extrait des équations du champ suggère justement la métrique à laquelle le problème de Cauchy et les conditions d'isothermie nous ont déjà conduit. Nous formons ensuite, par la méthode de Mme M. A. TONNELAT, les équations approchées de la théorie d'EINSTEIN-SCHRÖDINGER, et nous en déduisons une forme explicite du tenseur d'énergie.

NOTATIONS ET SYMBOLES.

- V_4 : variété espace-temps.
 (x^a) : système de coordonnées locales.
 $\partial_\alpha, \partial_{\alpha\beta}$: dérivées partielles.
 d : symbole de différentiation extérieure.
 δ_β^α : symbole de KRONECKER.

Convention d'EINSTEIN: Toutes les fois que dans un monôme figure deux fois le même indice, une fois en indice supérieur, une fois en indice inférieur, on doit, sauf avis contraire, sommer tous les monômes obtenus en donnant à cet indice toutes les valeurs possibles.

Les indices grecs α, β , etc ... prennent les valeurs 0, 1, 2, 3; les indices latins i, j , etc ... prennent les valeurs 1, 2, 3.

VARIÉTÉ A CONNEXION AFFINE.

- $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$: connexion affine quelconque.
 Γ_α : vecteur de torsion de la connexion affine.
 D_α : opérateur de dérivation covariante dans la connexion affine.
 $R_{\lambda\mu}$ est le tenseur de RICCI de la connexion affine Γ , déduit du tenseur de courbure :

$$R_{\lambda,\mu\beta}^\alpha = \partial_\beta \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha - \partial_\mu \Gamma_{\lambda\beta}^\alpha + \Gamma_{\sigma\beta}^\alpha \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma - \Gamma_{\sigma\mu}^\alpha \Gamma_{\lambda\beta}^\sigma,$$

par contraction des indices α, β :

$$R_{\lambda\mu} = \partial_\alpha \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha - \partial_\mu \Gamma_{\lambda\alpha}^\alpha + \Gamma_{\sigma\alpha}^\alpha \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma - \Gamma_{\sigma\mu}^\alpha \Gamma_{\lambda\alpha}^\sigma.$$

- $g_{\alpha\beta}$: tenseur fondamental défini sur la variété à connexion affine.
 $g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}$: le « — » est le symbole de symétrisation, le « $\frown$ » celui d'antisymétrisation.

Les lettres gothiques représentent des densités tensorielles. Exemple :

$$\mathfrak{g}^{\alpha\beta} = \sqrt{|g|} g^{\alpha\beta}, \quad \mathfrak{N}_\varrho^\lambda = \sqrt{|g|} M_\varrho^\lambda.$$

VARIÉTÉ RIEMANNIENNE.

Forme quadratique fondamentale :

$$ds^2 = a_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta.$$

$a_{\alpha\beta}$ est le tenseur métrique fondamental ou tenseur de gravitation.

$\delta_{\alpha\beta}$: valeurs galiléennes.

$\eta_{\alpha\beta}$: écarts du tenseur métrique $a_{\alpha\beta}$ aux valeurs galiléennes.

$[\alpha\beta, \gamma]$: symbole de CHRISTOFFEL de première espèce

$$[\alpha\beta, \gamma] = \frac{1}{2} (\partial_\alpha a_{\beta\gamma} + \partial_\beta a_{\alpha\gamma} - \partial_\gamma a_{\alpha\beta}).$$

$\left\{ \begin{smallmatrix} \gamma \\ \alpha\beta \end{smallmatrix} \right\} = a^{\gamma\delta} [\alpha\beta, \delta]$: symbole de CHRISTOFFEL de seconde espèce.

Les coefficients de la connexion riemannienne sont égaux aux symboles de CHRISTOFFEL de seconde espèce.

∇_α : opérateur de dérivation covariante dans la connexion riemannienne.

Le tenseur de courbure et le tenseur de RICCI de la connexion riemannienne sont désignés respectivement par $G_{\lambda\mu\beta}^\alpha$ et par $G_{\lambda\mu}$.

$$G_{\lambda\mu} = \partial_\alpha \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \lambda\mu \end{smallmatrix} \right\} - \partial_\mu \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \lambda\alpha \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \sigma\alpha \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} \sigma \\ \lambda\mu \end{smallmatrix} \right\} - \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \sigma\mu \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} \sigma \\ \lambda\alpha \end{smallmatrix} \right\}.$$

Par contraction de $G_{\lambda\mu}$ on obtient l'invariant G :

$$G = a^{\alpha\beta} G_{\alpha\beta}.$$

$S_{\alpha\beta} \equiv G_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} G a_{\alpha\beta}$: tenseur d'EINSTEIN.

CHAPITRE I.

NOTIONS SUR L'AXIOMATIQUE DE LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE

1. — La variété espace-temps.

La relativité générale est d'abord une théorie de la gravitation à laquelle viennent s'ajouter les théories de l'électromagnétisme. Dans toute théorie relativiste de la gravitation, l'élément primitif est constitué par une variété espace-temps V_4 à quatre dimensions, douée d'une structure de variété différentiable.

Nous prenons pour variété espace-temps V_4 une variété à quatre dimensions douée d'une structure de variété différentiable de classe C^2 , et satisfaisant en outre à l'hypothèse suivante qui complète A2. : dans l'intersection des domaines de deux systèmes de coordonnées locales, les dérivées secondes du changement de coordonnées sont des fonctions de classe C^2 par morceaux. C'est ce que nous traduirons en disant que la variété V_4 est une variété différentiable de classe $(C^2, C^4 \text{ par morceaux})$. (Cf. A. LICHTNEROWICZ [9], p. 3-5).

Sur la variété V_4 nous supposons définie une métrique riemannienne ds^2 partout de type hyperbolique normal par la donnée d'un champ de tenseurs covariants symétriques à deux indices $a_{\alpha\beta}$, appelé tenseur de gravitation. L'expression locale de cette métrique est :

$$(1.1) \quad ds^2 = a_{\alpha\beta}(x^\lambda) dx^\alpha dx^\beta \quad (\alpha, \beta, \lambda = 0, 1, 2, 3)$$

les coefficients $a_{\alpha\beta}(x^\lambda)$ sont dits les potentiels de gravitation pour le système de coordonnées envisagées. Nous supposons que les $a_{\alpha\beta}$ sont des fonctions de classe C^1 , et les $\partial_\gamma a_{\alpha\beta}$ des fonctions de classe C^2 par morceaux, ce qui est strictement compatible avec la structure imposée à V_4 .

L'hypothèse faite sur le type de la métrique revient à dire qu'en chaque point x de V_4 , le ds^2 peut se mettre sous la forme :

$$(1.2) \quad ds^2 = (\omega^0)^2 - (\omega^1)^2 - (\omega^2)^2 - (\omega^3)^2$$

où les ω^α sont un système de formes de Pfaff locales linéairement indépendantes.

2. — Orientations dans l'espace et dans le temps.

L'équation $ds^2 = 0$ définit en chaque point x de V_4 un cône réel C_x de directions tangentes à V_4 . Ce cône sera dit le cône élémentaire en x .

a) Une direction $\vec{dx}$, tangente en x à V_4 , sera dite orientée dans le temps ou dans l'espace selon qu'elle est intérieure ou extérieure au cône C_x , c'est-à-dire selon que le signe de $a_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ est positif ou négatif.

b) Un k plan élémentaire ($k = 2$ ou 3), tangent en x à V_4 est dit orienté dans l'espace si toutes ses directions sont orientées dans l'espace. Il est orienté dans le temps s'il admet des directions orientées dans le temps.

Une hypersurface S à trois dimensions de V_4 est dite orientée dans l'espace si ses éléments plans tangents aux différents points sont orientés dans l'espace. Si S est localement définie par l'équation :

$$f(x^\alpha) = 0,$$

on a alors en tout point de S :

$$\Delta_1 f = a^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \partial_\beta f > 0.$$

Si $\Delta_1 f < 0$, l'hypersurface S sera orientée dans le temps.

3. — Temps et espace associé. Systèmes de coordonnées physiquement admissibles.

Sur l'espace vectoriel T_x , tangent en x à V_4 , la métrique ds^2 introduite définit une structure d'espace-temps de MINKOWSKI c'est-à-dire une structure d'espace-temps de la relativité restreinte.

A toute décomposition en carrés de la métrique :

$$ds^2 = (\omega^0)^2 - \sum_i (\omega^i)^2 \quad i = 1, 2, 3$$

correspondent une base (ω^0, ω^i) pour les formes linéaires en x et un repère $(x, \vec{e}_0, \vec{e}_i)$ de T_x , avec :

$$d\vec{x} = \omega^\alpha \vec{e}_\alpha.$$

Le repère $(x, \vec{e}_0, \vec{e}_i)$ satisfait aux relations :

$$\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta = 0 \quad \text{pour } \alpha \neq \beta, \quad (\vec{e}_0)^2 = +1, \quad (\vec{e}_i)^2 = -1.$$

Un tel repère sera dit un repère orthonormé en x ; le vecteur $\vec{e}_0$ et le 3-plan des $\vec{e}_i$ définissent un temps et un espace associés.

L'interprétation des grandeurs en x se déduit de la considération de l'espace-temps de MINKOWSKI tangent en x . Rapporté à un repère orthonormé, cet espace doit être identifié à un espace-temps de la relativité restreinte rapporté à un repère galiléen, ce qui fournit immédiatement, en termes d'espace et de temps associés à ce repère, les interprétations physiques.

Un système de coordonnées sera dit physiquement admissible ou interprétable dans l'espace et le temps si :

1) les hypersurfaces à trois dimensions $x^0 = \text{const.}$ sont orientées dans l'espace (ce qui entraîne $a^{00} > 0$);

2) les lignes déterminées par les seules variations de x_0 sont orientées dans le temps (ce qui entraîne $a_{00} > 0$).

Dans un tel système de coordonnées nous dirons que x^0 est une variable temporelle, x^1, x^2, x^3 désignant les variables spatiales correspondantes. Les variétés $x^0 = \text{const.}$ sont appelées sections d'espace. Nous les désignerons par W_3 .

Considérons la décomposition en carrés du ds^2 , et faisons apparaître le carré correspondant à la variable x^0 . On a :

$$ds^2 = \frac{(a_{00} dx^0 + a_{0i} dx^i)^2}{a_{00}} + \left(a_{ij} - \frac{a_{0i} a_{0j}}{a_{00}} \right) dx^i dx^j \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

Il résulte de la condition $a_{00} > 0$ que les deux formes quadratiques associés de coefficients :

$$a_{ij}^* = a_{ij} - \frac{a_{0i} a_{0j}}{a_{00}}, \quad a^{*ij} = a^{ij}$$

sont définies négatives.

Les sections d'espace W_3 peuvent être envisagées comme des variétés différentiables satisfaisant aux mêmes hypothèses de différentiabilité que V_4 et formant un système homéomorphe aux R^3 d'un R^4 . La métrique ds^{*2} est intrinsèquement définie sur W_3 et nous pouvons choisir cette métrique dans les sections W_3 .

4. — Le système des équations d'EINSTEIN.

Le cadre géométrique étant précisé, l'objet de la théorie relativiste de la gravitation consiste à choisir un système tensoriel d'équations aux dérivées partielles. Celui-ci permet de limiter la généralité du tenseur fon-

damental de gravitation $a_{\alpha\beta}$ et de relier ce tenseur aux distributions énergétiques de l'espace-temps. Ces équations doivent généraliser l'équation de LAPLACE-POISSON qui détermine localement le potentiel newtonien.

EINSTEIN a proposé le système d'équations :

$$(4.1) \quad S_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta}$$

dans lequel $S_{\alpha\beta}$ et $T_{\alpha\beta}$ sont deux tenseurs symétriques. χ désigne un facteur constant lié à la constante d'attraction universelle.

Le tenseur $T_{\alpha\beta}$ dont l'interprétation est purement physique doit décrire au mieux, en chaque point de l'espace-temps V_4 , l'état de la distribution énergétique (cas intérieur). Dans les régions de V_4 non balayées par l'énergie $T_{\alpha\beta}$ doit être identiquement nul (cas extérieur). Ce tenseur sera appelé tenseur d'impulsion-énergie ou, plus brièvement, tenseur d'énergie.

Le tenseur $S_{\alpha\beta}$ de signification purement géométrique est astreint aux deux conditions suivantes :

1. ses composantes ne dépendent que des potentiels et de leurs dérivées des deux premiers ordres ; elles sont linéaires par rapport aux dérivées du second ordre ;

2. il est conservatif, c'est-à-dire satisfait identiquement aux quatre relations suivantes appelées conditions de conservation :

$$(4.2) \quad \nabla_\alpha S^\alpha_\beta = 0.$$

Les seules équations satisfaisant à ces conditions correspondent, à la constante cosmologique près, à

$$S_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} G a_{\alpha\beta}$$

où $G_{\alpha\beta}$ est le tenseur de RICCI de la variété riemannienne :

$$(4.3) \quad G_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \left\{ \begin{matrix} \varrho \\ \alpha \beta \end{matrix} \right\} - \partial_\beta \left\{ \begin{matrix} \varrho \\ \alpha \varrho \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \varrho \\ \sigma \varrho \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \alpha \beta \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \varrho \\ \sigma \beta \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \alpha \varrho \end{matrix} \right\}$$

G , l'invariant $a^{\alpha\beta} G_{\alpha\beta}$.

Dans le cas extérieur les équations s'écrivent :

$$S_{\alpha\beta} \equiv G_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} G a_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{ou} \quad G_{\alpha\beta} = 0.$$

5. — Le tenseur d'impulsion-énergie et les identités de conservation.

La représentation de la matière peut s'effectuer en relativité générale par des schémas du type hydrodynamique. Un fluide relativiste est alors considéré comme un milieu matériel continu, déformable, doué des propriétés suivantes :

1. il possède une densité propre ϱ ;
2. il est possible de définir un vecteur vitesse unitaire $\vec{u}$ pour chaque point du milieu.

Considérons dans la variété espace-temps V_4 un domaine D occupé par un milieu fluide. Les trajectoires du vecteur vitesse unitaire $\vec{u}$, orientées dans le temps, sont appelées lignes de courant. On appelle repère propre en un point x du domaine D , un repère orthonormé dont le premier vecteur $\vec{V}^{(0)}$ coïncide avec le vecteur vitesse unitaire $\vec{u}$, et dont les trois autres vecteurs $\vec{V}^{(i)}$, orientés dans l'espace, sont normés par la condition $(\vec{V}^{(i)})^2 = -1$. Le repère propre ainsi défini doit être identifié à un repère galiléen local.

Le tenseur d'impulsion-énergie est destiné à assurer une représentation aussi complète que possible d'une distribution énergétique déterminée. Ce tenseur contiendra ainsi différents termes correspondant aux différentes sortes d'énergie de la distribution et à leur interaction. La description de ces différents termes, leur importance relative, sont fournies par l'expérience.

Ainsi, le terme le plus important lorsqu'il existe, correspond toujours à l'énergie pondérable. Si l'on néglige toutes les autres formes d'énergie, on aura alors le schéma matière pure avec :

$$(5.1) \quad T_{\alpha\beta} = \varrho u_\alpha u_\beta.$$

On peut aussi considérer un état de la matière dont la description peut être faite à l'aide des grandeurs u, ϱ, p , les deux grandeurs scalaires étant supposées liées par une relation fonctionnelle dite équation d'état $\varrho = \varrho(p)$: c'est le schéma fluide parfait. Dans ce cas :

$$(5.2) \quad T_{\alpha\beta} = \left(\varrho + \frac{p}{c^2} \right) u_\alpha u_\beta - \frac{p}{c^2} a_{\alpha\beta}.$$

S'il y a un champ électromagnétique, on introduit un tenseur d'énergie supplémentaire :

$$(5.3) \quad \tau_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi c^2} \left(\frac{1}{4} a_{\alpha\beta} F_{\lambda\mu} F^{\lambda\mu} - F_\alpha{}^\lambda F_{\beta\lambda} \right)$$

où $F_{\alpha\beta}$ représente le tenseur champ électromagnétique défini sur l'espace tangent par induction du tenseur champ électromagnétique de la relativité restreinte.

Soit $T_{\alpha\beta}$ le tenseur d'énergie du schéma matériel considéré. Le tenseur $S_{\alpha\beta}$ étant conservatif, il en est de même du tenseur $T_{\alpha\beta}$ qui est astreint, d'après les équations d'EINSTEIN, à n'en différer que par un facteur constant :

$$(5.4) \quad \nabla_\alpha T^\alpha_\beta = 0.$$

On déduit de (5.4) un certain nombre de propriétés de « conservation » pour les éléments physiques qui figurent dans l'expression du tenseur d'énergie considéré. Par exemple, dans le cas du schéma matière pure, les équations de conservation s'écrivent :

$$(5.5) \quad \nabla_\alpha (\varrho u^\alpha) = 0,$$

$$(5.6) \quad u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta = 0.$$

La première équation est l'équation de continuité du milieu. Le système (5.6) exprime que les lignes de courant sont géodésiques de la métrique ds^2 .

Dans le cas du schéma matière pure-champ électromagnétique les lignes de courant satisfont au système différentiel :

$$u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta = \frac{\mu}{\varrho} F_{\beta\alpha} u^\alpha$$

où μ est la densité de charge électrique propre. L'introduction du tenseur d'énergie électromagnétique $\tau_{\alpha\beta}$ au second membre des équations d'EINSTEIN constitue une théorie « naïve » de l'électromagnétisme.

6. — Le problème de Cauchy.

Le système des équations d'EINSTEIN est un système en involution et présente le caractère hyperbolique normal. La structure locale des équations du champ peut être faite au moyen d'une analyse du problème de Cauchy. Ce problème traduit le « déterminisme relativiste », et le fait que la gravitation satisfait au schéma de la propagation par ondes résulte immédiatement de son étude ⁽¹⁾.

(1) Le problème de Cauchy a été étudié par G. DARMOIS, Th. de DONDER, A. LICHNEROWICZ; l'unicité dans le cas non analytique a été montrée par STELLMACHER, l'existence et l'unicité par Mme Y. FOURES.

Considérons d'abord le problème de Cauchy relatif au système d'équations d'EINSTEIN du cas extérieur, et à des données initiales (potentiels et dérivées premières) portées par une hypersurface S quelconque. Si S n'est, en aucun de ses points, tangente à une variété caractéristique et si les données de Cauchy satisfont à quatre conditions supplémentaires provenant des équations du champ, le problème de Cauchy admet relativement au système $G_{\alpha\beta} = 0$ une solution physiquement unique.

Les variétés caractéristiques du système des équations d'EINSTEIN sont les variétés tangentes en chacun de leurs points au cône élémentaire C_x associé à ce point, qui est cône caractéristique pour ces équations. Elles jouent le rôle de surface d'ondes gravitationnelles. Les bicaractéristiques des équations d'EINSTEIN, géodésiques de longueur nulle de la variété riemannienne V_4 , sont les rayons gravitationnels correspondants.

Le problème de Cauchy pour un schéma champ électromagnétique pur montre que les variétés caractéristiques que prévoient les équations d'EINSTEIN sont identiques à celles que définissent les équations de MAXWELL. Ainsi peut être démontrée en toute rigueur l'identité des ondes gravitationnelles et des ondes électromagnétiques et par suite l'identité des lois de propagation des deux champs, tout au moins en l'absence d'induction.

Appliqué à l'étude du prolongement de l'intérieur vers l'extérieur (ou inversement) le problème de Cauchy permet de mettre en évidence les conditions de raccordement de SCHWARZSCHILD relatives à la continuité des potentiels et de leurs dérivées premières. Si l'on considère une masse d'épreuve dans un champ de gravitation extérieur donné, la nécessité d'un raccordement entre champ intérieur et champ extérieur fait que la masse d'épreuve doit décrire une géodésique du ds^2 extérieur.

7. — Les coordonnées isothermes.

Au système des équations d'EINSTEIN on peut associer une équation à une seule fonction inconnue f qui admet les mêmes variétés caractéristiques que ce système. La manière la plus simple d'y parvenir est de considérer l'équation de LAPLACE dans V_4 :

$$(7.1) \quad \Delta_2 f \equiv a^{\alpha\beta} (\partial_{\alpha\beta} f - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} \partial_\alpha f) = 0.$$

L'équation (7.1) admet les mêmes caractéristiques et bicaractéristiques que le système des équations d'EINSTEIN. Le premier membre $\Delta_2 f = \nabla_\alpha (a^{\alpha\beta} \partial_\beta f)$ est la divergence du gradient de f et généralise ainsi le second paramètre

différentiel de BELTRAMI. Les variétés à trois dimensions, solutions de l'équation (7.1), généralisent les variétés isothermes de l'espace ordinaire, ou les hypersurfaces équipotentielles de la propagation des ondes. Elles jouent dans la théorie un rôle important.

Un système (x^α) de coordonnées locales dans V_4 est dit isotherme si les expressions

$$(7.2) \quad \Delta_2 x^\alpha = - a^{\lambda\mu} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \lambda \mu \end{matrix} \right\}$$

sont nulles pour tout α .

L'espace-temps étant rapporté aux coordonnées $(x^{\beta'})$, désignons par $f(x^{\beta'})$ une solution de l'équation (7.1). Si nous effectuons le changement de variables

$$x^\alpha = f(x^{\beta'})$$

α ayant une valeur déterminée d'ailleurs quelconque, la nouvelle coordonnée x^α est une coordonnée isotherme.

Quatre solutions indépendantes $f^\alpha(x^{\beta'})$ de l'équation (7.1) dont l'une est orientée dans le temps et les trois autres dans l'espace, constitueront un système de coordonnées physiquement admissibles isothermes.

Prenons pour $f^\alpha(x^{\beta'})$ la solution du problème de Cauchy suivant :

$$(7.3) \quad f^\alpha(x^{\beta'}) = 0 \text{ et } \partial_{\alpha'} f^\alpha(x^{\beta'}) = 1 \text{ sur la surface initiale } x^{\alpha'} = 0$$

($\alpha = 0, 1, 2, 3$; $\alpha' = \alpha$ numériquement).

D'après un théorème de Y. FOURES [36], il existe un voisinage de l'origine dans lequel la solution existe et est unique pourvu que les potentiels soient suffisamment différentiables. On voit donc qu'il existe un voisinage de l'origine dans lequel on peut définir des coordonnées isothermes.

Les quantités $\Delta_2 x^\alpha$ sont étroitement liées à la propagation du champ. Aussi, elles interviennent d'une manière simple dans les composantes du tenseur de RICCI. Les équations d'EINSTEIN peuvent ainsi, dans le cas général, se mettre sous la forme :

$$(7.4) \quad G_{\lambda\mu} \equiv - \frac{1}{2} a^{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta} a_{\lambda\mu} - \frac{1}{2} a_{\lambda\alpha} \partial_\mu (\Delta_2 x^\alpha) - \\ - \frac{1}{2} a_{\mu\alpha} \partial_\lambda (\Delta_2 x^\alpha) + H_{\lambda\mu} = 0,$$

les $H_{\lambda\mu}$ désignant des polynômes par rapport aux $a_{\alpha\beta}$, $a^{\alpha\beta}$ et à leurs dérivées premières. Si les coordonnées sont isothermes (7.4) devient :

$$(7.5) \quad G_{\lambda\mu} \equiv - \frac{1}{2} a^{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta} a_{\lambda\mu} + H_{\lambda\mu} = 0$$

et la séparation des potentiels, en ce qui concerne les dérivées secondes, est complète. C'est en mettant les équations d'EINSTEIN sous une forme équivalente qu'est apparu primitivement le caractère de propagation du champ, particulier à la théorie de la relativité.

Le groupe des équations (7.5) permet d'étudier les discontinuités possibles pour les dérivées secondes. Supposons que la surface de discontinuité ait pour équation :

$$f(x^\alpha) = 0.$$

On sait que si les dérivées premières sont continues, le saut brusque de la dérivée seconde $\partial_{\alpha\beta} a_{\lambda\mu}$ est proportionnel à $\partial_\alpha f \partial_\beta f$. Par conséquent si les potentiels n'ont pas toutes leurs dérivées secondes continues, l'une au moins des équations (7.5) aura pour conséquence :

$$\Delta_1 f = a^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \partial_\beta f = 0$$

tout le long de la surface $f = 0$.

Donc la discontinuité ne peut avoir lieu que suivant une variété caractéristique⁽²⁾. L'introduction des surfaces d'ondes et des rayons gravifiques se fait ainsi de la manière la plus satisfaisante. En outre les coordonnées isothermes éliminent automatiquement les discontinuités qui n'ont pas de signification intrinsèque.

La signification des coordonnées isothermes, les simplifications qu'elles apportent paraissent en imposer l'emploi dans beaucoup de questions physiques.

8. — Modèles d'univers et Problèmes globaux.

Les résultats obtenus dans l'étude du problème de Cauchy et les travaux de A. LICHNEROWICZ permettent de dégager la notion de « modèle d'univers ».

Un modèle d'univers est une variété V_4 (de type et de différentiabilité définis au paragraphe 1) munie d'une métrique partout régulière satisfaisant aux conditions :

a) Dans les domaines de V_4 balayés par une distribution énergétique et limités par des hypersurfaces frontières S , la métrique est régulière et satisfait aux équations d'EINSTEIN du cas intérieur.

(2) G. DARMOIS [4].

b) Dans les domaines de V_4 qui ne sont balayés par aucune distribution énergétique, la métrique est régulière et satisfait aux équations d'EISTEIN du cas extérieur.

c) A la traversée d'une hypersurface S , les potentiels et leurs dérivées premières sont continus conformément aux conditions de raccordement.

Quand il est possible de construire un tel modèle d'univers le champ extérieur peut être considéré comme effectivement produit par les différentes masses ou distributions énergétiques en mouvement et c'est le raccordement des champs intérieurs des différentes distributions avec un même champ qui assure l'interdépendance des mouvements.

Dans un tel modèle d'univers, il doit être impossible d'introduire de nouvelles distributions énergétiques dont les métriques associées se raccordent avec le champ extérieur. On doit donc étudier en relativité générale la validité de deux propositions suivantes dont la seconde est étroitement liée à la première:

L'introduction de distributions énergétiques dans un champ extérieur donné ne peut s'effectuer que dans des domaines où ce champ n'est pas régulier (Proposition A).

Tout ds^2 extérieur satisfaisant aux axiomes de la relativité générale et partout régulier doit être localement euclidien (Proposition B).

Ces propositions de nature globale sont extrêmement importantes pour la théorie. Elles ne sont pas valables sous les axiomes généraux de la théorie. Mais elles ont été établies sous des conditions assez larges, d'interprétation physique simple (stationnarité, sections d'espace complètes, comportement asymptotique euclidien)⁽³⁾.

Nous allons rappeler cette dernière hypothèse, dont nous aurons besoin.

9. — Comportement asymptotique euclidien.

Considérons un espace euclidien $\mathcal{E}_3$ à trois dimensions, admettant une métrique définie négative ds^2 . Nous rapportons $\mathcal{E}_3$ à un système de coordonnées privilégié (y^i) pour lequel:

$$ds^2 = \delta_{ij} dy^i dy^j$$

où $\delta_{ij} = -1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

⁽³⁾ A. LICHNEROWICZ [9] et [38].

Nous dirons que l'espace-temps V_4 admet un comportement asymptotique euclidien sur W_3 , lorsque pour un point a de W_3 et un nombre R suffisamment grand :

a. — il existe un homéomorphisme h de classe C^2 du domaine $d(a, x) > R$ de W_3 sur un domaine de $\mathcal{E}_3$ homéomorphe au complémentaire d'une boule fermée de $\mathcal{E}_3$. $d(a, x)$ désigne la distance de deux points a et x de la variété riemannienne W_3 ;

b. — si (y^a) est un système de coordonnées privilégiées de V_4 défini dans le domaine de V_4 qui correspond au domaine $d(a, x) > R$ de W_3 , par les (y^i) et la variable x^0 , nous avons dans ce domaine

$$|a_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}| < \frac{M}{r}, \quad |\delta_\gamma a_{\alpha\beta}| < \frac{M}{r^2}$$

où $\delta_{\alpha\beta} = 0$ si $\alpha \neq \beta$, $\delta_{00} = +1$, $r = d(a, x)$, M est un nombre positif fixe et où les potentiels $a_{\alpha\beta}$ et leurs dérivées sont relatifs aux coordonnées privilégiées (y^a) .

Dans la suite nous n'envisageons que des éléments de la section d'espace W_3 de V_4 .

Soit x_0 un point de W_3 tel que $r = d(a, x) > R$, y_0 son image par l'homéomorphisme h dans $\mathcal{E}_3$ et ϱ_0 la distance ordinaire de y_0 à l'origine 0 dans $\mathcal{E}_3$. On démontre que :

$$\varrho_0 < Kr_0$$

K étant un nombre positif fixe.

Il en résulte que les points du domaine à l'infini de W_3 ne sont autres que les points à l'infini de $\mathcal{E}_3$ muni de la métrique $ds^2 = \delta_{ij} dy^i dy^j$. Il est donc équivalent de dire que les écarts des potentiels avec les valeurs galiléennes $\delta_{\alpha\beta}$ se comportent comme $1/r$ ou $1/\varrho$.

10. — Champ quasi-galiléen.

Nous aurons à considérer un Univers (c'est-à-dire un domaine de l'espace et un intervalle de temps) où sont contenues de faibles masses; cet Univers est quasi-euclidien et nous pouvons y prendre des variables quasi-galiléennes. Rapportés à ces variables, les dix coefficients $a_{\alpha\beta}$ du ds^2 ont, en tout point de l'Univers considéré, des valeurs voisines des valeurs galiléennes $\delta_{\alpha\beta}$.

D'une manière plus précise, nous supposerons l'existence des développements limités des potentiels jusqu'à un certain ordre, en fonction du paramètre $1/c^2$, c désignant la vitesse de la lumière dans le vide. Pour désigner un champ présentant des développements limités de ce type et admettant un comportement asymptotique euclidien, nous emploierons le terme de champ quasi-galiléen. Pour un tel champ, les valeurs absolues des coefficients des développements limités admettent toutes des majorations par M/r et les valeurs absolues de leurs dérivées, des majorations par M/r^2 .

Etant donné un champ quasi-euclidien, on démontre qu'il existe toujours des changements de coordonnées tels que dans le nouveau système les coordonnées soient isothermes tout en restant quasi-galiléennes⁽⁴⁾. Nous avons vu que pour des coordonnées isothermes, les potentiels se séparent dans les équations d'EINSTEIN, du moins dans les dérivées secondes. Si l'on tient compte dans les applications physiques de l'hypothèse quasi-galiléenne, cette séparation est effective. On peut alors déterminer les coefficients du ds^2 satisfaisant aux équations d'EINSTEIN à l'aide des méthodes d'approximation.

(4) J. CHAZY [3], p. 149-150.

CHAPITRE II.

LA DÉTERMINATION DES ÉQUATIONS DE MOUVEMENT
BASÉE SUR L'EMPLOI DU CHAMP EXTÉRIEUR

I. - PRINCIPE DE LA DÉTERMINATION DES ÉQUATIONS DE MOUVEMENT.

Nous allons développer ici une étude générale d'un premier mode de déduction des équations du mouvement. La méthode d'EINSTEIN, INFELD, HOFFMANN s'en déduit immédiatement. Toutefois la présentation que nous adoptons ici est plus générale et peut s'appliquer aisément à une théorie pentadimensionnelle du champ unifié. D'autre part elle diffère de la présentation d'EINSTEIN, INFELD, HOFFMANN par les points suivants : nous partons du tenseur d'EINSTEIN au lieu du tenseur de RICCI et nous employons les coordonnées isothermes, ce qui apparaîtra plus rationnel.

11. — Etude du flux du vecteur $\vec{S}_{(a)}$.

Considérons une variété différentiable V_n à n dimensions, de classe $(C^2, C^4$ par morceaux), douée d'une métrique riemannienne de type hyperbolique normal :

$$ds^2 = a_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (\alpha, \beta = 0, 1, \dots, n-1).$$

Les $a_{\alpha\beta}(x^\lambda)$ sont des fonctions de classe $(C^1, C^3$ par morceaux). Pour $n=4$, on a la variété espace-temps V_4 de la relativité générale.

$G_{\alpha\beta}$ désigne le tenseur de RICCI de V_n . Les équations qui déterminent la structure géométrique de V_n généralisent les équations d'EINSTEIN dans V_4 . Ce sont :

$$(11.1) \quad S_{\alpha\beta} \equiv G_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} G a_{\alpha\beta} = \chi \Theta_{\alpha\beta} \quad \text{cas intérieur}$$

$$(11.2) \quad S_{\alpha\beta} \equiv G_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} G a_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{cas extérieur.}$$

En étendant les résultats de l'étude des problèmes globaux en mécanique relativiste, nous admettrons que le champ intérieur et le champ extérieur sont réguliers dans leurs domaines respectifs, et que le champ extérieur ne peut être prolongé régulièrement à l'intérieur des domaines de V_n où $\Theta_{\alpha\beta} \neq 0$ (tubes d'univers).

Le tenseur $S_{\alpha\beta}$ satisfait aux identités de conservation :

$$(11.3) \quad \nabla_\alpha S^\alpha_\beta = 0$$

Supposons que V_n soit rapporté à un système de coordonnées dans lequel x^0 joue le rôle de variable temporelle ($a_{00} > 0$) et les (x^i) , celui de variables spatiales ($a^{00} > 0$). Soit W_{n-1} une section déterminée $x^0 = \text{const.}$ de V_n . W_{n-1} est supposée douée de la structure de variété riemannienne définie par :

$$ds^{*2} = a^*_{ij} dx^i dx^j \quad (i, j = 1, \dots, n-1)$$

avec

$$a^*_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{0i} a_{0j}}{a_{00}},$$

$$a^{*ij} = a^{ij} \quad (a^{ij} \text{ désigne } a^{\alpha\beta} \text{ pour } (\alpha, \beta) = (i, j)),$$

en affectant d'une étoile toutes les quantités relatives à W_{n-1} .

Le changement de coordonnées locales

$$x^0 = x^{0'} \quad x^i = f^i(x^{j'})$$

conserve W_{n-1} . Dans ce changement de coordonnées, les quantités $S_{\alpha i}$ où l'indice α est fixé, se transforment selon la loi tensorielle

$$S_{(\alpha)i} = A_i^{\lambda'} S_{(\alpha)\lambda'} = A_i^{j'} S_{(\alpha)j'}$$

qui est la loi de transformation d'un vecteur de W_{n-1} . A ce vecteur, que nous notons $\vec{S}_{(\alpha)}$, on peut attacher la forme différentielle extérieure d'ordre $(n-2)$:

$$(11.4) \quad \Omega_{(\alpha)} = \frac{1}{(n-2)!} \eta^*_{i_1 \dots i_{n-1}} (a^{*i_{n-1}j} S_{(\alpha)j}) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{n-1}},$$

$\eta^*_{i_1 \dots i_{n-1}}$ tenseur antisymétrique attaché à la forme élément de volume de W_{n-1} .

Proposons-nous d'étudier le flux du vecteur $\vec{S}_{(\alpha)}$ à travers la frontière d'un domaine simplement connexe de W_{n-1} . De cette étude, et en tenant

compte des équations du champ (11.2) et des identités de conservation (11.3), résultent des relations entre les $\alpha_{\alpha\beta}$, moyennant quelques hypothèses qui seront précisées.

Considérons dans W_{n-1} un $(n-1)$ -champ C^{n-1} homéomorphe à la boule euclidienne à $(n-1)$ dimensions. Désignons par ∂C^{n-1} sa frontière, et posons :

$$\sigma_\alpha = \text{flux}_{\partial C^{n-1}}^* \dot{S}_\alpha.$$

Pour un champ C^{n-1} quelconque extérieur aux sections d'espace des tubes d'univers, il est évident, d'après le théorème de STOKES, que la condition nécessaire et suffisante pour que le flux σ_α soit nul est que la divergence du vecteur $\dot{S}_{(\alpha)}$, calculée dans W_{n-1} , soit nulle, ce qui s'écrit :

$$(11.5) \quad \nabla_i^* (a^{*ij} S_{(\alpha)j}) = 0$$

(la dérivation covariante ne doit pas porter sur l'indice α placé entre parenthèses).

Prenons au contraire un champ C^{n-1} quelconque contenant dans son intérieur la section d'espace d'un seul tube d'univers, le k -ème par exemple. Représentons ce champ par $\overset{k}{C}^{n-1}$, sa frontière par $\partial \overset{k}{C}^{n-1}$ et le flux de $\vec{S}_{(\alpha)}$ correspondant par σ_α . En appliquant le théorème de STOKES au domaine compris entre deux hypersurfaces frontières $\partial \overset{k}{C}^{n-1}$ et $\partial \overset{k}{C}^{n-1}$ dont l'une est intérieure à l'autre, on voit que (11.5) est la condition nécessaire et suffisante pour que le flux σ_α ait une valeur indépendante de la forme et de la grandeur de $\partial \overset{k}{C}^{n-1}$. En particulier, on peut alors prendre pour valeur de ce flux sa valeur calculée sur la frontière de la section d'espace du k -ème tube d'univers.

Le flux de $\vec{S}_{(\alpha)}$ à travers $\partial \overset{k}{C}^{n-1}$ est, par définition, l'intégrale de la $(n-2)$ -forme (11.4) sur le $(n-2)$ -champ constitué par $\partial \overset{k}{C}^{n-1}$:

$$(11.6) \quad \sigma_\alpha = \int_{\partial \overset{k}{C}^{n-1}} \Omega_{(\alpha)}.$$

Désignons par A le domaine représentatif de C^{n-1} dans l'espace euclidien E_{n-1} à $(n-1)$ dimensions. La frontière ∂A de A a pour image ∂C^{n-1} . Exprimons la forme $\Omega_{(\alpha)}$ à l'aide des paramètres $(t^1, t^2, \dots, t^{n-2})$ auxquels

est rapporté ∂A , nous avons

$$\Omega_{(\alpha)} = f_{(\alpha)} dt^1 \wedge \dots \wedge dt^{n-2}$$

où

$$f_{(\alpha)} = \frac{1}{(n-2)!} \eta_{i_1 \dots i_{n-1}}^* (a^{*i_{n-1}} S_{(\alpha)j}) \frac{D(x^{i_1}, \dots, x^{i_{n-2}})}{D(t^1, \dots, t^{n-2})}.$$

Le deuxième membre de (11.6) n'est autre que l'intégrale de la fonction $f_{(\alpha)}$ sur ∂A

$$\int_{\partial C^{n-1}} \Omega_{(\alpha)} = \int_{\partial A} f_{(\alpha)} dt^1 \wedge \dots \wedge dt^{n-2}.$$

On sait que cette intégrale peut être mise sous la forme

$$\int_{\partial A} S_{(\alpha)i} v^i \sqrt{|a'|} dt^1 \wedge \dots \wedge dt^{n-2}$$

où

$(v^i) =$ normale unitaire à ∂C^{n-1} ,

$a' =$ déterminant de la forme quadratique fondamentale de ∂C^{n-1} , rapportée aux paramètres $(t^1, \dots, t^{n-2})$ ⁽⁵⁾.

12. — Lemme préliminaire.

L'espace euclidien $\mathcal{E}_{n-1}$ étant rapporté à un système de coordonnées rectilignes (y^i) , choisissons comme application amenant A sur C^{n-1} , celle qui fait correspondre les points de $\mathcal{E}_{n-1}$ et de W_{n-1} ayant mêmes coordonnées.

LEMME. ⁽⁶⁾ Etant donné un système de fonctions $F_{(aa\dots)kl}$ telles que

$$F_{(aa\dots)kl} = -F_{(aa\dots)lk}$$

⁽⁵⁾ Voir A. LICHNEROWICZ, *Algèbre et analyse linéaire*, Masson, Paris (1947), pp. 192-194.

⁽⁶⁾ Ce lemme, ainsi que le théorème du paragraphe suivant, a été établi par EINSTEIN, INFELD et HOFFMANN dans le cas de la variété V_4 . La démonstration que nous donnons ici généralise celle de ces auteurs au cas d'une variété à n dimensions.

si ∂A ne passe par aucun point singulier des fonctions F , on a

$$(12.1) \quad \int_{\partial A} \partial_l F_{(aa\dots)kl} n^k d\Sigma = 0,$$

(n^i) étant la normale unitaire à ∂A et $d\Sigma$ l'élément de surface de ∂A .

(La convention de sommation des indices est étendue aux indices répétés deux fois en bas :

$$\partial_l F_{aa\dots kl} = \sum_{l=1}^{n-1} \partial_l F_{(aa\dots kl)}.$$

Faisons d'abord une remarque préliminaire. Soit dans une variété différentiable V_p à p dimensions, un q -champ C^q dont la frontière est nulle et une forme différentielle extérieure α d'ordre q , telle que $\alpha = d\beta$ sur C^q (d , symbole de différentiation extérieure). Alors on a :

$$(12.2) \quad \int_{C^q} \alpha = 0.$$

En effet, en transformant par la formule de STOKES il vient :

$$\int_{C^q} \alpha = \int_{C^q} d\beta = \int_{\partial C^q} \beta.$$

Par hypothèse $\partial C^q = 0$. Il en résulte la formule (12.2).

Cela étant, on a au premier membre de (12.1) l'intégrale sur le $(n-2)$ -champ ∂A d'une forme différentielle extérieure d'ordre $(n-2)$:

$$(12.3) \quad I = \int_{\partial A} \alpha,$$

$$(12.4) \quad \alpha = \frac{1}{(n-2)!} \varepsilon_{i_1 \dots i_{n-2}} \partial_l F_{(aa\dots)kl} dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_{n-2}}.$$

La frontière du champ ∂A étant nulle, il suffit pour prouver le lemme de montrer que cette forme α est la différentielle extérieure d'une autre forme β . En posant

$$F_{(aa\dots)kl} = \varepsilon_{klj_1 \dots j_{n-3}} A_{j_1 \dots j_{n-3}}$$

on voit que la forme (12.4) peut s'écrire :

$$\alpha = \frac{1}{(n-3)!} \partial_j A_{i_1 \dots i_{n-3}} dy^j \wedge dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_{n-3}}$$

c'est-à-dire :

$$\alpha = d\beta$$

avec :

$$\beta = \frac{1}{(n-3)!} A_{i_1 \dots i_{n-3}} dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_{n-3}}.$$

La formule (12.1) généralise la formule classique de la géométrie élémentaire selon laquelle l'intégrale d'un rotationnel sur une surface fermée est nulle.

13. — Propriétés fondamentales du flux de $\vec{S}_{(a)}$.

Faisons maintenant les hypothèses suivantes :

a) Les potentiels $a_{\alpha\beta}$ sont voisins des potentiels euclidiens

$$a_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \eta_{\alpha\beta},$$

les écarts $\eta_{\alpha\beta}$ admettent des développements limités en fonction d'un paramètre λ ($\lambda = 1/c$, c vitesse de la lumière) :

$$\eta_{\alpha\beta} = \sum_{p=1}^q \lambda^p \eta_{\alpha\beta}^{(p)} + O(\lambda^{q+1}).$$

En fait dans les développements que nous utiliserons, tous les coefficients de λ^p ne sont pas différents de zéro (voir plus loin, paragraphe 18).

b) La dérivée ∂_0 est petite devant les dérivées ∂_i . On peut alors poser

$$\partial_0 = \lambda \partial_0$$

et ∂_0 est du même ordre de grandeur que ∂_i . b) est appelé *hypothèse quasi-statique*.

Si l'on substitue aux $a_{\alpha\beta}$ leurs développements limités, il vient :

$$S_{\alpha\beta} = \sum_{p=1}^q \lambda^p S_{\alpha\beta}^{(p)} + O(\lambda^{q+1}),$$

$$\sigma_\alpha = \sum_{p=1}^q \lambda^p \sigma_\alpha^{(p)} + O(\lambda^{q+1}), \quad \sigma_\alpha = \int_p f_{(\alpha)} dt^1 \wedge \dots \wedge dt^{n-2},$$

$$\nabla_i^* (a^{*ij} S_{(a)j}) = \sum_{p=1}^q \lambda^p (\nabla_i^* (a^{*ij} S_{(a)j}))_p + O(\lambda^{q+1}).$$

(Dans le développement d'une quantité Q , le coefficient de λ^p sera désigné indifféremment par Q ou $(Q)_p$.)

On est amené pour déterminer les champs vérifiant $S_{\alpha\beta} = 0$, à intégrer successivement les équations $S_{\alpha\beta} = 0$ pour $p = 1, 2, \dots, m, \dots, q$.

Nous allons établir le théorème suivant :

THÉOREME 1. — Les hypothèses a) et b) étant faites

1°) Pour que la condition de divergence d'ordre m soit vérifiée

$$(13.1) \quad (\nabla_i^* (a^{*ij} S_{(\alpha)j}))_m = 0$$

il suffit que l'on ait $S_{\alpha\beta} = 0$ pour tous les $p \leq m - 1$;

2°) La valeur de S_{α}^k ne dépend effectivement que des valeurs de $\eta_{\alpha\beta}$ ($p \leq m - 1$). Elle est indépendante de $\eta_{\alpha\beta}$.

1) Etudions la condition (11.5) en mettant en évidence la divergence du vecteur $S_{(\alpha)}$ au premier membre des identités de conservation. Tenant compte de $a^{*ij} = a^{ij}$ et de

$$S_{\alpha}^i = a^{ij} S_{j\alpha} + a^{i0} S_{0\alpha}$$

il vient

$$\nabla_i^* (a^{*ij} S_{(\alpha)j}) = \partial_i S_{(\alpha)}^i + \left\{ \begin{matrix} i \\ l \ i \end{matrix} \right\}^* S_{\alpha}^l - \Gamma_i^* (a^{i0} S_{\alpha 0}).$$

En posant

$$A_{\alpha} = \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \lambda \ \beta \end{matrix} \right\} S_{\alpha}^{\lambda} - \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \alpha \ \beta \end{matrix} \right\} S_{\lambda}^{\beta} - \left\{ \begin{matrix} i \\ l \ i \end{matrix} \right\}^* S_{\alpha}^l + \nabla_i^* (a^{i0} S_{(\alpha)0})$$

les identités de conservation peuvent donc s'écrire

$$(13.2) \quad \nabla_{\beta} S_{\alpha}^{\beta} = \nabla_i^* (a^{*ij} S_{(\alpha)j}) + \partial_0 S_{\alpha}^0 + A_{\alpha} = 0.$$

On voit que la condition (11.5) ne peut pas être satisfaite identiquement. Cependant on tire de (3.2)

$$- (\nabla_i^* (a^{*ij} S_{(\alpha)j}))_m = (\partial_0 S_{\alpha}^0)_m + (A_{\alpha})_m.$$

La dérivée partielle qui figure dans $\partial_0 S_{\alpha}^0$ est la dérivée par rapport à la coordonnée x^0 et A_{α} ne contient que les produits de $S_{\alpha\beta}$ par $\eta_{\alpha\beta}$,

$\eta^{\alpha\beta} (= a^{\alpha\beta} - \delta^{\alpha\beta})$ et par leurs dérivées partielles. Aussi la quantité $(\partial_0 S_\alpha^0 + A_\alpha)_m$ fait intervenir seulement les $S_{\alpha\beta}$ ($p \leq m-1$). On en déduit que les équations

$$S_{\alpha\beta} = 0 \quad (p \leq m-1)$$

entraînent $(\partial_0 S_\alpha^0 + A_\alpha)_m = 0$, donc

$$(\nabla_i^* (a^{*ij} S_{(\alpha j)}))_m = 0.$$

2) Explicitons l'expression de $S_{\alpha i}$ qui figure dans l'intégrale donnant le flux σ_α .

On peut écrire

$$S_{\alpha\beta} = \left(G_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} \delta^{\lambda\varrho} G_{\lambda\varrho} \right) + M_{\alpha\beta},$$

en posant

$$M_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} (\delta_{\alpha\beta} \eta^{\lambda\varrho} + \delta^{\lambda\varrho} \eta_{\alpha\beta}) G_{\lambda\varrho} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \eta^{\lambda\varrho} G_{\lambda\varrho}.$$

$M_{\alpha\beta}$ ne contient que les produits de $G_{\alpha\beta}$ par $\eta_{\alpha\beta}$ et par $\eta^{\alpha\beta}$. Si l'on suppose provisoirement $S_{\alpha\beta} = 0$ pour tous les $p \leq m-1$, on aura $M_{\alpha\beta} = 0$, d'où

$$S_{\alpha\beta} = \left(G_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} \delta^{\lambda\varrho} G_{\lambda\varrho} \right)_m.$$

Ceci nous suggère de poser

$$(13.3) \quad n_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} \delta^{\lambda\varrho} \eta_{\lambda\varrho}$$

et d'exprimer $S_{\alpha\beta}$ en fonction de $n_{\alpha\beta}$ au lieu de $\eta_{\alpha\beta}$. L'introduction des quantités $n_{\alpha\beta}$ n'est nullement indispensable, mais elle a l'avantage de simplifier l'écriture des équations. Par multiplication contractée de (13.3) par $\delta^{\alpha\beta}$, on obtient

$$\delta^{\alpha\beta} n_{\alpha\beta} = -\frac{n-2}{2} \delta^{\lambda\varrho} \eta_{\lambda\varrho}.$$

La relation (13.3) est donc équivalente à

$$(13.4) \quad \eta_{\alpha\beta} = n_{\alpha\beta} - \frac{1}{n-2} \delta_{\alpha\beta} \delta^{\lambda\varrho} n_{\lambda\varrho},$$

Substituant $a_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \eta_{\alpha\beta}$ dans $S_{\alpha\beta}$, puis faisant le changement de fonction défini par (13.4), il vient après calcul :

$$(13.5) \quad S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \delta^{\lambda\rho} (\partial_{\beta\lambda} n_{\alpha\rho} + \partial_{\alpha\lambda} n_{\beta\rho} - \partial_{\lambda\rho} n_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta} \delta^{\mu\nu} \partial_{\mu\lambda} n_{\nu\rho}) + A'_{\alpha\beta} + M_{\alpha\beta},$$

où $A'_{\alpha\beta}$ représente les termes non linéaires de $\left(G_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} \delta^{\lambda\rho} G_{\lambda\rho}\right)$. On en déduit ⁽⁷⁾ :

$$(13.6) \quad S_{\alpha i} = \Phi_{\alpha i} + A_{\alpha i} + M_{\alpha i},$$

où

$$(13.7) \quad \Phi_{\alpha i} = -\frac{1}{2} \partial_i (\partial_i n_{\alpha i} - \partial_i n_{\alpha i} - \delta_i^\alpha \partial_r n_{ir} + \delta_i^\alpha \partial_r n_{ir}),$$

$$(13.8) \quad A_{0i} = -\frac{1}{2} \partial_{s0} n_{is} + \frac{1}{2} \partial_{i0} n_{00} + A'_{0i},$$

$$(13.9) \quad A_{ij} = \frac{1}{2} \partial_{0j} n_{0i} + \frac{1}{2} \partial_{0i} n_{0j} - \delta_j^i \partial_{0s} n_{0s} - \frac{1}{2} \partial_{00} n_{ij} + \frac{1}{2} \delta_j^i \partial_{00} n_{00} + A'_{ij}.$$

Nous avons groupé dans $\Phi_{\alpha i}$ tous les termes linéaires de $S_{\alpha i}$ qui sont soumis à des dérivées partielles dont aucun indice n'est égal à zéro, dans $A_{\alpha i}$ les autres termes linéaires de $S_{\alpha i}$ ainsi que les termes non linéaires de $\left(G_{\alpha i} - \frac{1}{2} \delta_{\alpha i} \delta^{\lambda\rho} G_{\lambda\rho}\right)$.

On tire de (13.6)

$$S_{\alpha i} = \underset{m}{\Phi_{\alpha i}} + \underset{m}{A_{\alpha i}} + \underset{m}{M_{\alpha i}}.$$

D'après l'hypothèse b), les seuls termes de $\underset{m}{S_{\alpha i}}$ faisant intervenir $\underset{m}{\eta_{\alpha\beta}}$

$\left(= \underset{m}{n_{\alpha\beta}} - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} \delta^{\lambda\rho} \underset{m}{n_{\lambda\rho}}\right)$ sont contenus dans $\underset{m}{\Phi_{\alpha i}}$.

D'autre part, le coefficient de λ^m dans le développement de σ_α^k est égal à

$$(13.10) \quad \underset{m}{\sigma_\alpha^k} = \int_{\partial D} \underset{m}{f_{(\alpha)}} dt^1 \wedge \dots \wedge dt^{n-2},$$

⁽⁷⁾ Les notations $\eta_{\alpha\beta}$ et $n_{\alpha\beta}$ correspondent à $h_{\alpha\beta}$ et $\gamma_{\alpha\beta}$ dans les travaux d'EINSTEIN, INFELD et HOFFMANN. Les notations $\Phi_{\alpha\beta}$ (au facteur $-\frac{1}{2}$ près), $A_{\alpha\beta}$ et $A'_{\alpha\beta}$ (au facteur -1 près) sont celles de ces auteurs.

avec

$$f_{(a)}^i = S_{ai}(\nu^i \sqrt{|a'|})_0 + \sum_{p=1}^{m-1} S_{ai}(\nu^i \sqrt{|a'|})_{m-p}.$$

Pour justifier la deuxième partie du théorème, il suffit par conséquent de montrer que la contribution de Φ_{ai} dans l'intégrale (13.10) est nulle, c'est-à-dire établir

$$(13.11) \quad \int_{\partial A} \Phi_{ai}(\nu^i \sqrt{|a'|})_0 dt^1 \wedge \dots \wedge dt^{n-2} = 0.$$

Si l'on pose

$$F_{(a)il} = -\frac{1}{2} (\partial_i n_{al} - \partial_l n_{ai} - \delta_i^a \partial_r n_{lr} + \delta_l^a \partial_r n_{ir})$$

l'expression Φ_{ai} se met sous la forme

$$\Phi_{ai} = \partial_l F_{(a)il},$$

où les fonctions $F_{(a)ij}$ satisfont aux conditions énoncées dans le lemme. Elles sont antisymétriques par rapport aux indices, i, j et elles n'ont pas de singularités sur ∂A . Comme d'autre part

$$(13.12) \quad (\nu^i \sqrt{|a'|})_0 dt^1 \wedge \dots \wedge dt^{n-2} = n^i d\Sigma,$$

on a d'après le lemme

$$\int_{\partial A} \Phi_{ai}(\nu^i \sqrt{|a'|})_0 dt^1 \wedge \dots \wedge dt^{n-2} = \int_{\partial A} \partial_l F_{(a)il} n^i d\Sigma = 0.$$

Une conséquence immédiate de ce théorème est que l'on peut étendre la définition de σ_{α}^k à la valeur $m = q + 1$, si q est l'ordre des développements limités de $\eta_{\alpha\beta}$.

Dans la suite, lorsque nous calculons σ_{α}^k , les équations $S_{\alpha\beta} = 0$ ($p \leq m - 1$) sont supposées vérifiées. L'expression de σ_{α}^k se réduit à

$$\sigma_{\alpha}^k = \int_{\partial A} S_{ai}(\nu^i \sqrt{|a'|})_0 dt^1 \wedge \dots \wedge dt^{n-2},$$

et en tenant compte de (13.11) (13.12) elle devient

$$(13.13) \quad \sigma_{\alpha}^k = \int_m^k A_{\alpha i} u^i d\Sigma.$$

La formule (13.13) sera utilisée pour le calcul effectif du flux.

14. — Définition des équations de mouvement.

Comment obtient-on maintenant les équations de mouvement ?

Pour tout système de $a_{\alpha\beta}$ solution des équations du champ $S_{\alpha\beta} = 0$, donc a fortiori de $S_{\alpha i} = 0$, on a nécessairement

$$(14.1) \quad \sigma_{\alpha}^k = \int_{\partial C^{n-1}}^k \Omega_{(\alpha)} = 0,$$

$k = 1, 2, \dots, N$; N = nombre de tubes d'univers. Si les hypothèses a) et b) sont satisfaites, chaque σ_{α}^k d'une part est fonction des $\eta_{\alpha\beta}^p$ ($p \leq m-1$), d'autre part est indépendant du choix de ∂C^{n-1} . Les conditions nécessaires (14.1), qui s'écrivent alors :

$$(14.2) \quad \sigma_{\alpha}^k = \sum_{m=1}^{q+1} \lambda^m \sigma_{\alpha}^k + 0 (\lambda^{q+2}) = 0,$$

constituent des relations que doivent vérifier les $a_{\alpha\beta}$ solution des équations du champ. Ces relations ne dépendent que de la frontière de la section d'espace du k -ème tube d'univers.

Supposons de plus que les tubes d'univers puissent être considérés comme des lignes d'univers. Alors la section d'espace du k -ème tube d'univers se réduit à un point dont nous désignerons les coordonnées par $(\xi^1, \dots, \xi^{n-1})^k$, et le flux σ_{α}^k , indépendant de ∂C^{n-1} , ne peut dépendre que des coordonnées $(\xi^i)^k$ et de leurs dérivées par rapport à x^0 . Nous verrons, lorsque nous ferons les calculs d'approximation dans le cas $n = 4$, que les $nN = 4N$ relations (14.2) déterminent $(n-1)N = 3N$ fonctions $\xi^i(x^0)^k$, qui

ne sont donc autre chose que les équations des N lignes d'univers, c'est-à-dire les équations de mouvement en relativité générale⁽⁸⁾.

Généralisant ce résultat, nous allons postuler que les équations du mouvement sont encore données par (14.2) dans le cas où les sections d'espace des tubes d'univers ne sont plus ponctuelles ni à symétrie sphérique.

Le théorème précédent est important parce qu'il nous fait comprendre pourquoi l'approximation des équations du champ permet d'obtenir les équations du mouvement. En effet, si σ_a^k dépend effectivement de $\eta_{\alpha\beta}^m$, comme cela apparaît à première vue, le calcul de σ_a^k sera lié à la solution de $S_{\alpha\beta}^m = 0$. La nullité de σ_a^k découlera simplement, comme une conséquence triviale, de $S_{ai}^m = 0$. L'équation (14.2)

$$\sigma_a^k = \sum_{m=1}^{q+1} \lambda^m \sigma_a^k + 0 (\lambda^{q+2}) = 0$$

ne peut conduire à aucun résultat utilisable. En effet, le premier membre sera toujours identiquement nul.

Remarquons aussi le rôle joué par l'hypothèse quasi-statique dans les deux parties de ce théorème.

15. — Application à la méthode d'Einstein, Infeld et Hoffmann.

La méthode que nous venons d'exposer comprend comme cas particulier la méthode d'EINSTEIN, INFELD et HOFFMANN. Elle se réduit à cette dernière pour $n = 4$ et si l'on considère des singularités ponctuelles du champ extérieur dans W_3 .

En relativité générale EINSTEIN, INFELD et HOFFMANN déduisent les équations du mouvement de :

$$(15.1) \quad c_a^k = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_k} -2 \left(G_{oi} - \frac{1}{2} \delta_{oi} \delta^{\lambda o} G_{\lambda o} \right) n^i d\Sigma = 0,$$

(8) D'une manière plus précise, les équations du mouvement résultent de $\sigma_i^k = 0$. La condition $\sigma_0^k = 0$ associée aux conditions de coordonnées, sert à fixer la valeur des fonctions harmoniques arbitraires qui interviennent dans la solution des équations du champ (voir plus loin).

Σ_k désignant une surface fermée quelconque de l'espace euclidien de représentation $\mathcal{E}_3$, surface entourant seulement la k -ème singularité. Par la méthode d'approximation on a évidemment :

$$(15.2) \quad -2\pi \underset{l}{c}_\alpha = \underset{l}{\sigma}_\alpha \quad (\underset{p}{S}_{\alpha\beta} = 0, \quad p \leq l-1)$$

les équations $\underset{k}{c}_\alpha = 0$ et $\underset{k}{\sigma}_\alpha = 0$ sont alors équivalentes.

Mais en appliquant les équations $\underset{k}{\sigma}_\alpha = 0$ pour obtenir les équations de mouvement en relativité générale, nos calculs diffèrent de ceux de ces auteurs par l'emploi d'un système de coordonnées isothermes.

16. — Rôle du tenseur d'impulsion-énergie et des équations du cas intérieur dans le problème du mouvement.

EINSTEIN et ses collaborateurs pensent que les équations de mouvement doivent être autant que possible déduites des équations du cas extérieur, qui seules sont définies sans ambiguïté, alors que toute représentation de la matière par un tenseur d'impulsion-énergie doit dépendre des hypothèses faites sur la constitution de la matière. Cette conception est sans doute née du fait que l'exposé théorique de la méthode ne fait intervenir à aucun moment le tenseur d'énergie ou les équations du cas intérieur.

Mais, pour former effectivement les équations de mouvement, il nous faut chercher une solution des équations $\underset{k}{S}_{\alpha\beta} = 0$, solution nécessaire pour évaluer le flux $\underset{k}{\sigma}_\alpha$ du vecteur $\vec{S}_{(\alpha)}$. Il nous semble que, si on calcule un champ extérieur sans aucune supposition sur ce qui se passe à l'intérieur des singularités de ce champ, la solution obtenue correspond difficilement à une réalité physique. Sans préciser tous les éléments d'une distribution énergétique, certaines solutions extérieures dépendent cependant de certains caractères de cette distribution (par exemple la solution à symétrie sphérique). La distribution énergétique manifeste sa présence aussi bien à l'extérieur qu'à l'intérieur des tubes d'univers. Aussi croyons-nous qu'il n'y a pas lieu d'isoler le champ extérieur et de le considérer pour lui-même indépendamment du champ intérieur. Tout ds^2 extérieur interprétable physiquement doit pouvoir être meublé dans ses domaines singuliers, en d'autres termes doit pouvoir être considéré comme effectivement produit par une certaine distribution énergétique. De ce point de vue, pour construire un ds^2 extérieur interprétable physiquement, le plus simple serait de renverser le problème en se donnant un schéma de distribution énergétique, adapté à la structure plus

ou moins fine qu'on désire avoir de l'Univers, et en déduisant par prolongement le ds^2 créé à l'extérieur.

La représentation de la matière par un tenseur d'impulsion-énergie nous paraît une tentative satisfaisante pour approcher la réalité ; les hypothèses qu'on y fait, qui sont fournies par l'expérience, sont très simples. EINSTEIN et ses collaborateurs eux-mêmes, malgré leurs dires, n'ont pu éviter son emploi et celui des équations du cas intérieur. En effet ces équations interviennent implicitement pour établir, en première approximation, la propriété⁽⁹⁾

$$(16.1) \quad \eta_{ij} - \delta_j^i \eta_{00} = 0.$$

D'autre part elles se manifestent d'une manière moins apparente lorsque l'on calcule une solution des équations du champ extérieur « représentant des particules matérielles ». EINSTEIN, INFELD et HOFFMANN sont obligés en effet du supposer que les pôles des fonctions qui figurent dans la solution sont des pôles simples, tandis que les pôles multiples doivent être exclus « comme n'ayant pas de signification physique ». C'est seulement avec cette

hypothèse que les équations $c_\alpha = 0$, à une approximation donnée, imposent réellement des conditions aux champs déterminés dans les approximations précédentes, c'est-à-dire sont susceptibles de définir les équations de mouvement. Faire l'hypothèse des pôles simples, c'est supposer que l'on a des potentiels newtoniens, et cela revient à considérer le tenseur d'énergie d'un système de points matériels. C'est ce qui apparaît clairement lorsque L. INFELD reprend le problème du mouvement par la méthode du tenseur d'énergie en introduisant des masses représentées par des distributions de DIRAC.

En définitive, la différence entre notre méthode et celle du tenseur d'énergie n'est pas tellement dans l'emploi des équations de départ du cas extérieur ou du cas intérieur. Elle réside essentiellement dans l'adoption des équations qui définissent les équations de mouvement : dans l'une des méthodes, celles-ci s'obtiennent en annulant une intégrale portant sur le premier membre des identités de conservation du tenseur d'énergie

$$(16.2) \quad \int V_\alpha T_i^\alpha dV = 0,$$

où l'intégrale est étendue au domaine de W_3 occupé par le k -ème corps ; dans l'autre, elles sont données par la nullité du flux d'un vecteur lié au

(9) Cf. plus loin, page 463.

tenseur $S_{\alpha\beta}$

$$(16.3) \quad \int_{S_{(i)j}} v^j dS = 0,$$

l'intégrale étant prise sur une surface fermée quelconque de W_3 entourant seulement le k -ème corps, en particulier sur la frontière de ce corps elle-même.

Il semble que ces deux méthodes puissent se ramener l'une à l'autre. Pour un fluide parfait, par exemple, la méthode utilisant le flux doit probablement fournir dans les équations de mouvement un terme relatif à la pression.

17. — Expression de $S_{\alpha\beta}$ en coordonnées isothermes.

Avant de passer aux calculs d'approximation, cherchons l'expression du tenseur $S_{\alpha\beta}$ lorsque le système de coordonnées employé est isotherme, c'est-à-dire satisfait aux n relations

$$(17.1) \quad F^\lambda = - a^{\mu\nu} \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu \nu \end{matrix} \right\} = 0.$$

Portons notre attention sur les termes linéaires seulement. Si nous représentons par F'^λ les termes non linéaires de F^λ , les relations (17.1) s'écrivent

$$(17.2) \quad - \delta^{\mu\nu} \delta^{\rho\lambda} [\mu\nu, \rho] + F'^\lambda = 0,$$

ou, d'après (13.4)

$$(17.3) \quad - \delta^{\mu\nu} \delta^{\rho\lambda} \partial_\mu n_{\nu\rho} + F'^\lambda = 0.$$

D'autre part, on a

$$(17.4) \quad S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \delta^{\lambda\rho} (\partial_{\beta\lambda} n_{\alpha\rho} + \partial_{\alpha\lambda} n_{\beta\rho} - \partial_{\lambda\rho} n_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta} \delta^{\mu\nu} \partial_{\mu\lambda} n_{\nu\rho}) + A'_{\alpha\beta} + M_{\alpha\beta}.$$

Affectons de l'indice ($\mathcal{I}$) l'expression que prend une quantité lorsque les coordonnées sont isothermes. En transformant les termes linéaires de (17.4) par (17.3), on obtient

$$(17.5) \quad S_{\alpha\beta}^{(\mathcal{I})} = - \frac{1}{2} \square n_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} (\delta_{\beta\lambda} \partial_\alpha F'^\lambda + \delta_{\alpha\lambda} \partial_\beta F'^\lambda - \delta_{\alpha\beta} \partial_\lambda F'^\lambda) + \\ + A'_{\alpha\beta}^{(\mathcal{I})} + M_{\alpha\beta}^{(\mathcal{I})},$$

en posant $\square = \delta^{\lambda_0} \delta_{\lambda_0}$. On voit que les termes linéaires de $S_{\alpha\beta}^{(\mathcal{J})}$ se réduisent au dalembertien de $-\frac{1}{2} n_{\alpha\beta}$. D'où, la forme très simple des équations du champ

$$S_{\alpha\beta}^{(\mathcal{J})} = 0$$

à chaque ordre d'approximation, les termes non linéaires se comportant comme une quantité connue en vertu des approximations antérieures ⁽¹⁰⁾.

II. — APPLICATION A LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE.

18. — Expression générale des équations approchées du champ.

Revenons à la variété espace-temps V_4 . Nous considérons un Univers où les masses sont faibles (hypothèse *a*) et se meuvent lentement par rapport à la lumière (hypothèse *b*). Dans cet Univers quasi-galiléen il est toujours possible, par un changement de coordonnées, de rendre les coordonnées à la fois isothermes et quasi-galiléennes. Nous supposons que, rapportés à un tel système de coordonnées, les potentiels de gravitation admettent des développements limités en fonction du paramètre $1/c^2$, et se comportent comme des potentiels newtoniens dans le domaine à l'infini de W_3 :

$$(18.1) \quad \begin{cases} a_{00} = 1 + \eta_{00} = 1 + \frac{1}{c^2} \eta_{00} + \dots + \eta_{00} + 0(1/c^{2p+2}), \\ a_{0i} = \eta_{0i} = \frac{1}{c^3} \eta_{0i} + \dots + \frac{1}{c^{2p+1}} \eta_{0i} + 0(1/c^{2p+3}), \\ a_{ij} = -\delta_j^i + \eta_{ij} = -\delta_j^i + \frac{1}{c^2} \eta_{ij} + \dots + \frac{1}{c^{2p}} \eta_{ij} + 0(1/c^{2p+2}). \end{cases}$$

⁽¹⁰⁾ L'expression classique

$$G_{\alpha\beta}^{(\mathcal{J})} = -\frac{1}{2} a^{\mu\nu} \partial_{\mu\nu} a_{\alpha\beta} + a^{\mu\nu} a^{\rho\sigma} (\partial_\rho a_{\alpha\mu} \partial_\sigma a_{\beta\nu} - [\mu\rho, \alpha][\nu\sigma, \beta])$$

ne convient pas au calcul du flux de $\vec{S}_{(a)}$ parce que la quantité $A_{\alpha\beta}$ n'y est pas en évidence.

D'après l'hypothèse sur les vitesses des masses, on a $\partial_0 = (1/c) \partial_0$, où $\partial_0 (= \partial/\partial t)$ est du même ordre de grandeur que les ∂_i .

Nous verrons dans un instant pourquoi le développement de η_{0i} , à la différence des développements de η_{00} et η_{ij} , commence avec un terme en $(1/c^2)$.

Nous allons calculer, en coordonnées isothermes, une solution approchée des équations

$$S_{\alpha\beta} = 0,$$

en admettant l'hypothèse où les singularités du champ extérieur dans W_3 (c'est-à-dire les masses) sont ponctuelles et à symétrie sphérique. Cette hypothèse, qui n'est pas exigée par notre méthode, est employée uniquement pour faciliter la recherche du ds^2 extérieur. Elle est réalisée, en astronomie, dans le problème des N corps.

Nous calculons la valeur approchée correspondante du flux σ_α , et nous en déduisons les équations de mouvement en annulant ce flux. Les calculs seront faits dans les deux premières approximations, dont la première permet de retrouver les équations newtoniennes de la Mécanique classique, et dont la seconde met en évidence la correction relativiste.

Ecrivons les relations dont nous aurons besoin pour former les équations approchées du champ, les conditions d'isothermie et évaluer le flux du vecteur $\vec{S}_{(\alpha)}$. On a :

$$(18.2) \quad S_{\alpha\beta}^{(\mathcal{J})} = -\frac{1}{2} \square n_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} (\delta_{\beta\lambda} \partial_\alpha F'^{\lambda} + \delta_{\alpha\lambda} \partial_\beta F'^{\lambda} - \delta_{\alpha\beta} \partial_\lambda F'^{\lambda}) + \\ + A'_{\alpha\beta}^{(\mathcal{J})} + M_{\alpha\beta}^{(\mathcal{J})},$$

$$(18.3) \quad F'^{\lambda} = -a^{\alpha\beta} \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} = -\delta^{\alpha\beta} \delta^{\gamma\lambda} \partial_\alpha n_{\beta\gamma} + F'^{\lambda},$$

$$(18.4) \quad A_{0i}^{(\mathcal{J})} = -\frac{1}{2} \partial_{00} n_{i0} + \frac{1}{2} \partial_{i0} n_{00} - \frac{1}{2} \partial_0 F'^i + A_{0i}'^{(\mathcal{J})},$$

$$(18.5) \quad A_{ij}^{(\mathcal{J})} = \frac{1}{2} \partial_{0j} n_{0i} + \frac{1}{2} (\partial_{0i} n_{0j} - \delta_j^i \partial_{0s} n_{0s}) - \frac{1}{2} \partial_{00} n_{ij} - \\ + \frac{1}{2} \delta_j^i \partial_0 F'^0 + A_{ij}'^{(\mathcal{J})}.$$

Les différentes quantités figurant aux seconds membres de ces relations peuvent être calculées à partir de :

$$(18.6) \quad A'_{\alpha\beta} = G'_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} \delta^{\lambda\varrho} G'_{\lambda\varrho},$$

$$(18.7) \quad G'_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \eta^{\lambda\varrho} (\partial_{\beta\lambda} \eta_{\alpha\varrho} + \partial_{\alpha\varrho} \eta_{\beta\lambda} - \partial_{\lambda\varrho} \eta_{\alpha\beta} - \partial_{\alpha\beta} \eta_{\lambda\varrho}) + \partial_{\varrho} \eta^{\lambda\varrho} [\alpha \beta, \lambda] - \\ - \partial_{\beta} \eta^{\lambda\varrho} [\alpha \varrho, \lambda] + \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \alpha \beta \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \varrho \\ \lambda \varrho \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \alpha \varrho \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \varrho \\ \lambda \beta \end{matrix} \right\}.$$

$$(18.8) \quad F'^{\lambda} = -\eta^{\alpha\beta} \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \alpha \beta \end{matrix} \right\} + \delta^{\alpha\beta} \eta^{\gamma\lambda} [\alpha \beta, \gamma],$$

et

$$(18.9) \quad \eta_{\alpha\beta} = n_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} \delta^{\mu\nu} n_{\mu\nu}.$$

Enfin pour avoir les écarts $\eta^{\alpha\beta}$ par approximation, on se servira de la relation

$$(18.10) \quad a^{a\lambda} a_{\beta\lambda} = \delta_{\beta}^a,$$

qui se transforme en

$$(18.11) \quad \eta^{\alpha\beta} = -\delta^{\alpha\lambda} \delta^{\varrho\beta} \eta_{\varrho\lambda} - \delta^{\alpha\lambda} \eta^{\varrho\beta} \eta_{\varrho\lambda}.$$

Il est inutile de tenir compte de la quantité $M_{\alpha\beta}$, qui disparaîtra dans les équations approchées. Finalement, en posant pour simplifier

$$F'_{\alpha\beta} = \delta_{\beta\lambda} \partial_{\alpha} F'^{\lambda} + \delta_{\alpha\lambda} \partial_{\beta} F'^{\lambda} - \delta_{\alpha\beta} \partial_{\lambda} F'^{\lambda},$$

les équations du champ d'ordre l s'écrivent :

$$(18.12) \quad A_{\alpha\beta} = \partial_{00} n_{\alpha\beta} - F'_{\alpha\beta} - 2 A_{\alpha\beta}^{(\mathcal{J})}, \quad (M_{\alpha\beta} = 0)$$

ou, sous forme explicite :

$$(18.13) \quad A_{2p} n_{ij} = \partial_{00} n_{ij} - F'_{ij} - 2 A_{ij}^{(\mathcal{J})},$$

$$(18.14) \quad A_{2p} n_{00} = \partial_{00} n_{00} - F'_{00} - 2 A_{00}^{(\mathcal{J})},$$

$$(18.15) \quad A_{2p+1} n_{0i} = \partial_{00} n_{0i} - F'_{0i} - 2 A_{0i}^{(\mathcal{J})}.$$

Les équations (18.13) (18.14) (18.15) constituent ce que nous appelons le système d'équations du champ à la p -ème approximation. Les seconds membres de ces équations sont connus par les approximations antérieures; ce sont donc des équations de POISSON, qui se réduisent d'ailleurs dans la première approximation à des équations de LAPLACE.

19. — Propriété des potentiels de gravitation en première approximation.

Les développements des potentiels que nous avons posés tout à l'heure sont très généraux. Pour un ds^2 interprétable physiquement, les $a_{\alpha\beta}$ ne sont pas quelconques. Pour déterminer leurs propriétés il est nécessaire de considérer l'expression du tenseur d'énergie et les équations du cas intérieur.

Le terme prépondérant d'un tenseur d'énergie est relatif à la matière pondérable et a pour valeur $\varrho u_\alpha u_\beta$. Pour les calculs qui suivent, il suffit donc de prendre

$$T_{\alpha\beta} = \varrho u_\alpha u_\beta,$$

les résultats resteront vrais si l'on considère un tenseur d'énergie plus général.

Les équations

$$S_{\alpha\beta}^{(\mathcal{J})} = \chi T_{\alpha\beta},$$

où

$$\chi = \frac{8\pi G}{c^2},$$

G désignant la constante de l'attraction universelle, s'écrivent donc en première approximation

$$(19.2) \quad \begin{cases} \Delta n_{00} = \frac{16\pi G}{c^2} \varrho + 0(1/c^4), \\ \Delta n_{0i} = \frac{16\pi G}{c^3} \varrho v^i + 0(1/c^5), \\ \Delta n_{ij} = \frac{16\pi G}{c^4} \varrho v^i v^j - \frac{2}{c^4} A_{ij}'^{(\mathcal{J})} + 0(1/c^6). \end{cases} \quad (v^i = dx^i/dt)$$

Il résulte alors de la formule donnant la solution de l'équation de POISSON que l'on a

$$(19.3) \quad n_{00} = 0(1/c^2), \quad n_{0i} = 0(1/c^3), \quad n_{ij} = 0(1/c^4).$$

Etant données les relations entre $\eta_{\alpha\beta}$ et $n_{\alpha\beta}$, (19.3) justifie les développements que nous avons posés en (18.1). On constate aussi, d'après (19.3) que le ds^2 , aussi bien intérieur qu'extérieur, possède la propriété

$$(19.4) \quad \underset{2}{n}_{ij} = 0,$$

qui se traduit en fonction de $\eta_{\alpha\beta}$ par

$$(19.5) \quad \underset{2}{\eta}_{ij} - \frac{1}{2} \delta_{ij} \delta^{\mu\nu} \underset{2}{\eta}_{\mu\nu} = 0.$$

En multipliant par $-\delta^{ij}$ et contractant, on obtient

$$\underset{2}{\eta}_{00} + \frac{1}{2} \delta^{\mu\nu} \underset{2}{\eta}_{\mu\nu} = 0,$$

et (19.5) devient simplement

$$(19.6) \quad \underset{2}{\eta}_{ij} - \frac{1}{2} \delta_j^i \underset{2}{\eta}_{00} = 0.$$

Tenant compte de (19.4) ou (19.6) on a donc :

$$\underset{2}{\eta}_{00} = \frac{1}{2} \underset{2}{n}_{00}, \quad \underset{2}{\eta}_{ij} = \frac{1}{2} \delta_j^i \underset{2}{n}_{00},$$

et

$$\begin{aligned} \alpha &= -1 + \frac{1}{c^2} (\underset{2}{\eta}_{ss} - \underset{2}{\eta}_{00}) + \frac{1}{c^4} (\underset{4}{\eta}_{ss} - \underset{4}{\eta}_{00}) + 0(1/c^6), \\ |\overline{a}| &= 1 - \frac{1}{c^2} \underset{2}{\eta}_{00} + \frac{1}{2c^4} (\underset{4}{\eta}_{00} - \underset{4}{\eta}_{ss} - \underset{2}{\eta}_{00}^2) + 0(1/c^6), \\ &= 1 - \frac{1}{2c^2} \underset{2}{n}_{00} + \frac{1}{2c^4} \left(\underset{4}{n}_{ss} - \underset{4}{n}_{00} - \frac{1}{4} \underset{2}{n}_{00}^2 \right) + 0(1/c^6). \end{aligned}$$

20. — Formule du potentiel newtonien.

Considérons en particulier l'équation approchée (19.2) où les indices α , β , ont la valeur zéro

$$(20.1) \quad \frac{1}{c^2} \Delta \underset{2}{n}_{00} = \frac{16\pi G}{c^2} \varrho.$$

Elle exprime que la fonction $(1/4)n_{00}$ satisfait à l'équation de LAPLACE à l'extérieur des masses et à l'équation de POISSON à l'intérieur d'une masse continue. Sa solution est donnée par la formule du potentiel newtonien

$$(20.2) \quad n_{00} = -4 G \iiint \frac{\varrho}{r} dV.$$

L'intégrale triple doit être étendue dans l'espace euclidien de représentation à tout le volume occupé par la masse. La quantité r désigne la distance d'un point de ce volume au point où l'on calcule le coefficient n_{00} du ds^2 .

Si les masses se décomposent en N masses distinctes, l'intégrale triple est une somme de N intégrales partielles. Quand on assimile ces N masses à des points matériels, chaque intégrale se réduit à un seul élément, et le produit ϱdV est, pour chaque élément, remplacé en première approximation par la masse m_0 de la Mécanique classique (masse au repos relativiste). L'intégrale (20.2) se réduit à

$$(20.3) \quad n_{00} = -4 G \sum_{k=1}^N m_0^k / r^k,$$

avec

$$(20.4) \quad r^k = \sqrt{(x^1 - \xi^1)^2 + (x^2 - \xi^2)^2 + (x^3 - \xi^3)^2}$$

en désignant par (ξ^i) les coordonnées d'espace du k -ème point matériel.

L'expression $-G m_0^k / r^k$ représente le potentiel newtonien créé par le k -ème point matériel sauf au point lui-même. Pour avoir sa signification au point $(x^i = \xi^i)$, il faut revenir sur la détermination de la solution n_{00} de l'équation (20.2) et sur le passage à la limite réduisant un corps continu à un point matériel de masse m . Si le point (x^i) est intérieur au k -ème corps, selon des résultats classiques, l'intégrale relative à ce corps reste finie, et même tend vers zéro avec les dimensions de ce corps. Il en résulte que, si les N corps continus tendent vers des points matériels, la quantité (20.2) a pour limite, au point $(x^i = \xi^i)$, l'expression

$$(20.5) \quad (n_{00})_{x^i = \xi^i} = (-4 G \sum_{s \neq k}^s m_0^s / r^s)_{x^i = \xi^i}.$$

21. Première approximation des équations du champ.

Supposons que les potentiels de gravitation admettent les développements limités :

$$(21.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{00} = 1 + \frac{1}{c^2} \eta_{00} + 0(1/c^4), \\ a_{0i} = \frac{1}{c^3} \eta_{0i} + 0(1/c^5), \\ a_{ij} = -\delta_j^i + \frac{1}{c^2} \eta_{ij} + 0(1/c^4). \end{array} \right.$$

A la première approximation, seuls les termes linéaires sont différents de zéro. On a le système d'équations :

$$(21.2) \quad \Delta_2 n_{00} = 0,$$

$$(21.3) \quad \Delta_3 n_{0i} = 0,$$

$$(21.4) \quad F_3^0 = \partial_r n_{r0} - \partial_0 n_{00} = 0.$$

Quelle fonction harmonique faut-il prendre comme solution de (21.2)? Puisque nous cherchons un champ extérieur, dont les singularités dans W_3 , supposées ponctuelles et à symétrie sphérique, représentent des particules matérielles, nous adoptons comme en (20.3) la solution :

$$(21.5) \quad n_{00} = -4 G \sum_{s=1}^N \frac{m_0^s}{r^s},$$

où r^k est la distance du point (x^i) au k -ème point matériel, distance définie par (20.4).

Les équations (21.3), (21.4) et l'hypothèse sur le comportement des potentiels à l'infini, déterminent alors n_{0i} :

$$(21.6) \quad n_{0i} = 4 G \sum_{s=1}^N \left(m_0^s / r^s \right) \xi^i, \quad (\xi^i = \partial \xi^i / \partial t).$$

Notons qu'on doit calculer les dérivées $\partial_0 n_{\alpha\beta}$ ($\partial_0 = \partial / \partial t$) en considérant $n_{\alpha\beta}$ comme fonction de t par l'intermédiaire des coordonnées (ξ^i) des masses données.

Nous poserons dans la suite

$$(21.7) \quad U = \sum_{s=1}^N U^s,$$

$$(21.8) \quad U = -G m_0 / r,$$

d'où :

$$n_{00} = 4U,$$

$$n_{0i} = -4 \sum_{s=1}^N U^s \xi^i,$$

et

$$a_{00} = 1 + \frac{2U}{c^2} + O(1/c^4),$$

$$a_{0i} = -\frac{4}{c^3} \sum_{s=1}^N U^s \xi^i + O(1/c^5),$$

$$a_{ij} = -\delta_j^i + \frac{2U}{c^2} \delta_j^i + O(1/c^4);$$

$$\sqrt{|a|} = 1 - \frac{2U}{c^2} + O(1/c^4).$$

22. — Equations newtoniennes du mouvement.

Nous calculons le flux σ_α^k du vecteur $\hat{S}_\alpha$:

$$\sigma_\alpha^k = \int_{\partial \mathcal{C}^3} S_{(\alpha)i}^k v^i dS,$$

en prenant dans l'espace euclidien de représentation $\mathcal{E}_3$, une petite sphère Σ_k ayant pour centre la k -ème singularité du champ. Dans l'intégrale

$$(22.1) \quad \sigma_\alpha^k = \int_{\Sigma_k} S_{(\alpha)j}^k n^j d\Sigma = \int_{\Sigma_k} A_{\alpha j}^k n^j d\Sigma,$$

seuls les termes d'ordre -2 en $\overset{k}{r}$, lorsque $\overset{k}{r}$ tend vers zéro, donnent une contribution différente de zéro. La notation $\sim$ signifie que nous omettons d'écrire au second membre, des termes qui ne contribuent pas à l'intégrale (22.1), soit parce qu'ils ne sont pas d'ordre -2 en $\overset{k}{r}$ ($\overset{k}{r} \rightarrow 0$), soit parce qu'ils ont la forme $\partial_l F_{(a)jl}$, $F_{(a)jl}$ étant antisymétrique en j, l (voir lemme paragraphe 13). On a alors :

$$(22.2) \quad A_{0j}^{(\mathcal{J})} = \frac{1}{2} \partial_{j0} n_{00} \sim -2G \overset{k}{m}_0 \partial_j (1/r) \quad (\overset{k}{m}_0 = \partial m_0 / \partial t)$$

d'où :

$$(22.3) \quad \sigma_0 = 8\pi G \overset{k}{m}_0.$$

L'équation

$$(22.4) \quad \sigma_0 = \frac{8\pi G}{c^3} \overset{k}{m}_0 + 0(1/c^5) = 0$$

montre qu'en première approximation, les masses sont indépendantes du temps.

On a de même :

$$(22.5) \quad A_{ij}^{(\mathcal{J})} = \frac{1}{2} \partial_{0j} n_{0i} + \frac{1}{2} \partial_s (\delta_s^i \partial_0 n_{0j} - \delta_j^i \partial_0 n_{0s}) + A_{ij}'^{(\mathcal{J})},$$

avec

$$(22.6) \quad A_{ij}'^{(\mathcal{J})} = 2\partial_i U \partial_j U + 4U \partial_{ij} U - 3\delta_j^i \partial_s U \partial_s U,$$

d'où

$$(22.7) \quad A_{ij}^{(\mathcal{J})} \sim \frac{1}{2} \partial_{0j} n_{0i} + 2\partial_i U \partial_j U + 4U \partial_{ij} U - 3\delta_j^i \partial_s U \partial_s U.$$

Au second membre de (22.7), il y a des « termes croisés », c'est-à-dire des produits de $\overset{k}{U}$ ou de ses dérivées par $\overset{l}{U}$ ($l \neq k$) ou par leurs dérivées. En développant les fonctions harmoniques $\overset{l}{U}$ ($l \neq k$), analytiques en dehors de leurs pôles, en série de TAYLOR au voisinage du point ($x^i = \overset{k}{\xi}^i$), nous avons :

$$(22.8) \quad \overset{l}{U} = \overset{l}{\tilde{U}} + (x^p - \overset{k}{\xi}^p) \overset{l}{\tilde{\partial}}_p \overset{l}{U} + \frac{1}{2!} (x^p - \overset{k}{\xi}^p) (x^q - \overset{k}{\xi}^q) \overset{l}{\tilde{\partial}}_{pq} \overset{l}{U} + \dots \quad (l \neq k).$$

Les symboles $\overset{l}{\tilde{U}}, \overset{l}{\tilde{\partial}}_i \overset{l}{U}, \overset{l}{\tilde{\partial}}_{ij} \overset{l}{U}, \dots$ désignent les valeurs que prennent les fonctions $\overset{l}{U}$ ($l \neq k$) et leurs dérivées partielles au point ($x_i = \overset{k}{\xi}^i$). Substituant

(22.8) dans (22.7) il vient :

$$(22.9) \quad A_{ij}^{(\mathcal{G})} \underset{4}{\sim} -2 \partial_j U \overset{k}{\xi}^i + 2 (\partial_i U \sum_{l \neq k} \overset{l}{\widetilde{\partial}}_j U + \partial_j U \sum_{l \neq k} \overset{l}{\widetilde{\partial}}_i U) \\ + 4 \partial_{ij} U \sum_{l \neq k} (\overset{k}{x}^p - \overset{k}{\xi}^p) \overset{l}{\widetilde{\partial}}_p U - 6 \overset{k}{\partial}_j^i \partial_s U \sum_{l \neq k} \overset{l}{\widetilde{\partial}}_s U.$$

En remplaçant $\overset{k}{U}$ par sa valeur (21.8) et en intégrant, on trouve :

$$(22.10) \quad \underset{4}{\sigma}_i = -8 \pi G m_0 (\overset{k}{\xi}^i + \sum_{l \neq k} \overset{l}{\widetilde{\partial}}_i U).$$

Les équations $\overset{k}{\sigma}_i = 0$ s'écrivent donc en première approximation :

$$(22.11) \quad -\frac{8 \pi G}{c^4} m (\overset{k}{\xi}^i + \sum_{l \neq k} \overset{l}{\widetilde{\partial}}_i U) + 0(1/c^6) = 0.$$

Ce sont les équations de mouvement en Mécanique classique, d'un système de N points matériels soumis à des forces dérivant de la fonction de force $-U$.

23. — Deuxième approximation des équations du champ.

Supposons maintenant que les potentiels de gravitation admettent des développements jusqu'au sixième ordre :

$$(23.1) \quad a_{00} = 1 + \frac{2}{c^2} U + \frac{1}{c^4} \eta_{00} + 0(1/c^6), \\ a_{0i} = -\frac{4}{c^3} \sum_s U \overset{s}{\xi}^i + \frac{1}{c^5} \eta_{0i} + 0(1/c^7), \\ a_{ij} = -\delta_j^i + \frac{2}{c^2} \partial_j^i U + \frac{1}{c^4} \eta_{ij} + 0(1/c^6).$$

Nous trouvons d'après les relations du paragraphe 18 :

$$\underset{4}{F'}^i = 4 U \partial_i U, \\ \underset{5}{F'}^0 = -2 n_{0s} \partial_s U + 4 U \underset{1}{\partial}_0 U, \quad (n_{0i} = -\frac{4}{c^3} \sum_{s=1}^N U \overset{s}{\xi}^i)$$

et :

$$A'_{ij}^{(\mathcal{G})} = 2 \partial_i U \partial_j U + 4 U \partial_{ij} U - 3 \delta_j^i \partial_s U \partial_s U ,$$

$$A'_{00}^{(\mathcal{G})} = 3 \partial_s U \partial_s U ,$$

$$A'_{0i}^{(\mathcal{G})} = - \partial_i n_{0s} \partial_s U + n_{0s} \partial_{si} U + 6 \partial_i U \partial_0 U .$$

D'où le système des équations du champ :

$$(23.4) \quad An_{ij} = 4 \partial_i U \partial_j U + 2 \delta_j^i \partial_s U \partial_s U , \quad (n_{ij} = 0)$$

$$(23.5) \quad An_{00} = 4 \partial_{00} U - 2 \partial_s U \partial_s U ,$$

$$(23.6) \quad An_{0i} = \partial_{00} n_{0i} + 4 \partial_i n_{0s} \partial_s U - 12 \partial_i U \partial_0 U ,$$

avec les conditions de coordonnées :

$$(23.7) \quad F_i = - \partial_r n_{ri} + \partial_0 n_{0i} + 4 U \partial_i U = 0 ,$$

$$(23.8) \quad F^0 = \partial_r n_{r0} - \partial_0 n_{00} - 2 n_{0r} \partial_r U + 4 U \partial_0 U = 0 .$$

Nous intégrons les équations du champ (23.4), (23.5), (23.6) en cherchant une solution particulière des équations avec second membre. Il faut ajouter à cette solution particulière la solution générale des équations homogènes. La solution générale est constituée par des fonctions harmoniques qui seront déterminées par les conditions d'isothermie (23.7), (23.8) et par la condition d'intégrabilité $\sigma_0^k = 0$.

Les équations du mouvement sont ainsi uniquement déterminées par les conditions

$$\sigma_i^k = 0 \quad (i = 1, 2, 3) .$$

La solution des équations du champ n'est déterminée qu'à des fonctions harmoniques additives près. Il en résulte que les conditions d'isothermie n'ont qu'un rôle secondaire dans la méthode d'EINSTEIN, INFELD et HOFFMANN. Elles ne conduisent pas à elles seules aux équations de mouvement. Elles interviennent alors par l'intermédiaire des fonctions harmoniques.

L'équation (23.5) s'intègre sans difficulté. Mais (23.4) pour $i \neq j$ et (23.6) ne peuvent pas être intégrées dans tout l'espace parce que leurs seconds membres contiennent des termes croisés autres que $\partial_s U \partial_s U \left(= \frac{1}{2} \Delta U \right)$. Cette circonstance toutefois n'a pas d'inconvénient si l'on ne considère que le problème du mouvement; en effet pour le calcul du flux du vecteur $\vec{S}_\alpha$ il est suffisant de connaître les potentiels dans le voisinage des particules. On obtient alors aisément une solution particulière de (23.4), (23.6) dans le voisinage de la k -ème particule, en remplaçant au second membre de ces équations les fonctions $U(l \neq k)$ par leurs développements (22.8) limités aux termes utiles, et en utilisant les relations suivantes déduites de (21.8):

$$(23.9) \quad \begin{cases} \Delta \left(-\frac{1}{2} {}^k U(x^i - \xi^i) \right) = \partial_i {}^k U, \\ \Delta \left(-\frac{1}{4} r^2 \partial_i {}^k U \partial_j {}^k U + \frac{1}{4} U^2 \delta_j^i \right) = \partial_i {}^l U \partial_j {}^l U, \\ \Delta \left(-\frac{1}{2} G m_0 {}^k r \right) = {}^k U. \end{cases}$$

1) Si l'on se place au voisinage de la k -ème particule, l'équation (23.4) peut s'écrire :

$$(23.10) \quad \Delta n_{ij} = 4 \partial_i {}^k U \partial_j {}^k U + 2 \delta_j^i \partial_s {}^k U \partial_s {}^k U + \\ + 4 \left[\partial_i {}^k U \sum_{l \neq k} \tilde{\partial}_j {}^l U + \partial_j {}^k U \sum_{l \neq k} \tilde{\partial}_i {}^l U + \delta_j^i \partial_s {}^k U \sum_{l \neq k} \tilde{\partial}_s {}^l U + 0(1/r) \right].$$

L'intégration donne: ⁽¹¹⁾

$$(23.11) \quad n_{ij} = -\frac{1}{4} r^2 \partial_i {}^k U \partial_j {}^k U + \frac{1}{2} U^2 \delta_j^i + 2 \left[U(x^i - \xi^i) \sum_{l \neq k} \tilde{\partial}_j {}^l U + \right. \\ \left. + U(x^j - \xi^j) \sum_{l \neq k} \tilde{\partial}_i {}^l U + \delta_j^i U(x^s - \xi^s) \sum_{l \neq k} \tilde{\partial}_s {}^l U + 0(r) \right] + \alpha_{ij} {}^k U,$$

⁽¹¹⁾ EINSTEIN ne tient pas compte dans son texte ([27], p. 230) des termes $0 \left(\frac{x^m - \xi^m}{r} \right)$. Néanmoins ces termes apparaissent dans le tableau de l'intégrale $\frac{{}^k c_i}{6}$ (p. 240).

$\alpha_{ij}^k U^k$ désignant la fonction harmonique arbitraire. Nous nous servons de cet arbitraire pour satisfaire la condition d'isothermie (23.7). Portant (23.11) dans l'expression F^i , il vient :

$$(23.12) \quad F^i = -4 \partial_r U \dot{\xi}^r \dot{\xi}^i - 4 \partial_i U \sum_{l \neq k} \tilde{U}^l + \alpha_{ir} \partial_r U + 0 \left(\frac{x^m - \xi^m}{r} \right) = 0,$$

d'où la valeur du coefficient α_{ij}^k :

$$(23.13) \quad \alpha_{ij}^k = 4 (\dot{\xi}_i \dot{\xi}^j + \delta_j^i \sum_{l \neq k} \tilde{U}^l).$$

2) Si l'on fait $i=j$ dans (23.4) on obtient l'équation

$$\Delta n_{rr} = 10 \partial_s U \partial_s U,$$

dont la solution est :

$$(23.14) \quad n_{rr} = 5 U^2 + \sum_{k=1}^N \alpha^k U^k,$$

La solution valable au voisinage de la k -ème particule doit être en accord avec la valeur de (23.11) pour $i=j$, ce qui donne :

$$(23.15) \quad \alpha = 4 \dot{\xi}^s \dot{\xi}^s + 2 \sum_{l \neq k} \tilde{U}^l.$$

3) On obtient de même comme solution de (23.5):

$$(23.16) \quad n_{00} = -2 G \sum_{s=1}^N m_0 \partial_{00}^s r - U^2 + 4 \sum_{s=1}^N (m/m_0)^s U^s.$$

la fonction harmonique $4 \sum_{s=1}^N (m/m_0)^s U^s$ sera déterminée pour que la condition

$$(23.17) \quad \sigma_0 = \int_{\Sigma_k} A_{0j} n^j d\Sigma = 0$$

soit satisfaite. On trouve après calcul :

$$\sigma_0 = -8 \pi G \left[-\frac{1}{2} m_0 - \frac{1}{2} m_0 \left(\sum_{l \neq k} \tilde{\partial}_s U \tilde{\xi}^s + \sum_{l \neq k} \tilde{\partial}_s U \tilde{\xi}^s \right) \right].$$

En notant que

$$\partial_0^l \tilde{U} = \tilde{\partial}_s^l U (\dot{\xi}^s - \dot{\xi}^s),$$

$$\partial_0^k (\dot{\xi}^s \dot{\xi}^s) = -2 \sum_{l \neq k} \tilde{\partial}_s^l U \dot{\xi}^s + 0 (1/c^2),$$

on peut mettre l'expression σ_0^k sous la forme :

$$(23.18) \quad \sigma_0^k = 8\pi G \frac{\partial}{\partial t} [m - \frac{1}{2} m_0 (\sum_{l \neq k} \tilde{U} + \dot{\xi}^s \dot{\xi}^s)].$$

On tire de (23.17) (23.18) :

$$(23.19) \quad m = \frac{1}{2} m_0 (\dot{\xi}^r \dot{\xi}^r + \sum_{l \neq k} \tilde{U} + A),$$

A étant la constante d'intégration.

4) Enfin l'équation (23.6) se réduit dans le voisinage de la k -ème particule à :

$$(23.20) \quad \Delta n_{0i} = -4 \sum_{s=1}^N \partial_{00}^s (U \dot{\xi}^i) + 4 [\partial_m^k U \sum_{l \neq k} \tilde{\partial}_i^l U (3\dot{\xi}^m - 4\dot{\xi}^m) + \partial_i^k U \sum_{l \neq k} \tilde{\partial}_m^l U (-4\dot{\xi}^m + 3\dot{\xi}^m) + 0 (1/r)].$$

On obtient en l'intégrant :

$$(23.21) \quad n_{0i} = \sum_{s=1}^N 2Gm_0 \partial_{00}^s (r \dot{\xi}^i) + r^2 \partial^k U \partial_s^k U \dot{\xi}^s - U^2 \dot{\xi}^i + 2 [U (x^m - \xi^m) \sum_{l \neq k} \tilde{\partial}_i^l U (3\dot{\xi}^m - 4\dot{\xi}^m) + U (x^i - \xi^i) \sum_{l \neq k} \tilde{\partial}_m^l U (-4\dot{\xi}^m + 3\dot{\xi}^m) + 0 (r)] + \alpha_{0i} U.$$

Nous disposons de la fonction harmonique arbitraire $\alpha_{0i}^k U$ pour satisfaire

la condition d'isothermie (23.8). Il vient

$$F^0_5 = \alpha_{0i} \overset{k}{\partial_i} U + 2 \overset{k}{\partial_i} U \overset{k}{\xi^i} (\overset{k}{\xi^s} \overset{k}{\xi^s} + A) - 4 \overset{k}{\partial_j} U \sum_{l \neq k} \overset{l}{\xi^i} \overset{l}{\xi^i} (\overset{l}{\xi^i} - 2 \overset{l}{\xi^i}) = 0,$$

d'où

$$(23.22) \quad \alpha_{0i} = -2 \overset{k}{\xi^i} (\overset{k}{\xi^r} \overset{k}{\xi^r} + A) + 4 \overset{k}{\xi^i} \sum_{l \neq k} \overset{l}{\xi^i} \overset{l}{\xi^i} \overset{l}{\xi^i} - 8 \sum_{l \neq k} \overset{l}{\xi^i} \overset{l}{\xi^i} \overset{l}{\xi^i}.$$

24. — Equations du mouvement.

Il nous faut maintenant calculer la quantité $A_{ij}^{(\mathcal{J})}$, porter dans l'expression obtenue la solution des équations du champ, puis effectuer les calculs d'intégration conduisant à la valeur de $\overset{k}{\sigma_i}_6$:

$$(24.1) \quad \overset{k}{\sigma_i}_6 = \int_{\Sigma_k} A_{ij}^{(\mathcal{J})} n^j d\Sigma.$$

Tous ces calculs sont très longs et sans intérêt. Aussi donnons-nous seulement les résultats. Des calculs analogues se trouvent dans les articles d'EINSTEIN et de ses collaborateurs, articles auxquels le lecteur pourra se reporter.

Nous obtenons ⁽¹²⁾:

$$(24.2) \quad A_{ij}^{(\mathcal{J})} = \overset{6}{\partial_s} (\overset{6}{\partial_s} U n_{ij} - \overset{4}{\partial_j} U n_{is}) + \overset{6}{\partial_s} (U \overset{4}{\partial_s} n_{ij} - U \overset{4}{\partial_j} n_{is}) + \\ + \overset{6}{\partial_s} (\overset{4}{\delta^i_j} \overset{4}{\partial_r} U n_{rs} - \overset{4}{\delta^i_s} \overset{4}{\partial_r} U n_{rj}) + \overset{6}{\partial_s} (\overset{4}{\delta^i_j} U \overset{4}{\partial_r} n_{rs} - \overset{4}{\delta^i_s} U \overset{4}{\partial_r} n_{rj}) + \\ + \overset{6}{\partial_s} (\overset{4}{\delta^i_j} \overset{4}{\partial_s} U n_{rr} - \overset{4}{\delta^i_j} \overset{4}{\partial_s} U n_{rr}) + \frac{1}{2} \overset{6}{\partial_s} (\overset{4}{\delta^i_s} U \overset{4}{\partial_j} n_{rr} - \overset{4}{\delta^i_j} U \overset{4}{\partial_s} n_{rr}) +$$

⁽¹²⁾ L'expression (24.2) diffère de l'expression obtenue par EINSTEIN avec les conditions de coordonnées $\delta^{\alpha\beta} \partial_\alpha n_{\beta 0} = 0$, $\partial_r n_{ri} = 0$ par les termes:

$$\overset{6}{\partial_s} (\overset{4}{\delta^i_j} U \overset{4}{\partial_r} n_{rs} - \overset{4}{\delta^i_s} U \overset{4}{\partial_r} n_{rj}) - \overset{4}{\delta^i_j} \overset{1}{\partial_0} (\overset{4}{\partial_s} U n_{0s}) + 2 \overset{4}{\delta^i_j} \overset{1}{\partial_0} (U \overset{1}{\partial_0} U) + 2 \overset{4}{\delta^i_j} U \overset{11}{\partial_{00}} U + \\ + 2 \overset{4}{\delta^i_j} \overset{4}{\partial_s} U \overset{4}{\partial_s} U U.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \partial_s (\delta_s^i \partial_0 n_{0j} - \delta_j^i \partial_0 n_{0s}) + \frac{1}{4} \partial_s (n_{0s} \partial_i n_{0j} - n_{0j} \partial_i n_{0s}) + \\
& + \partial_s (\delta_s^i \partial_0 U n_{0j} - \delta_j^i \partial_0 U n_{0s}) + \frac{1}{2} \partial_s (n_{0s} \partial_j n_{0i} - n_{0j} \partial_s n_{0i}) + \\
& + \frac{1}{4} \partial_s (\delta_s^i n_{0r} \partial_r n_{0j} - \delta_j^i n_{0r} \partial_r n_{0s}) + \frac{1}{2} \partial_s (\delta_j^i n_{0r} \partial_s n_{0r} - \delta_s^i n_{0r} \partial_j n_{0r}) + \\
& + \partial_s (\delta_s^i \partial_j U n_{00} - \delta_j^i \partial_s U n_{00}) + \partial_s (\delta_s^i U \partial_j n_{00} - \delta_j^i U \partial_s n_{00}) + \\
& + \frac{1}{2} \partial_{0j} n_{0i} - \frac{1}{2} \partial_{00} n_{ij} - \frac{1}{2} n_{0s} \partial_{ij} n_{0s} \quad [\beta_1 + \beta_2 + \beta_3] \\
& + \frac{1}{4} \delta_j^i \partial_r n_{0s} \partial_r n_{0s} - \delta_j^i \partial_0 (\partial_s U n_{0s}) + \partial_0 (\partial_j U n_{0i}) \quad [\beta_4 + \beta_5 + \beta_6] \\
& + \partial_0 (\partial_i U n_{0j}) - \partial_0 (U \partial_j n_{0i}) - \partial_0 (U \partial_i n_{0j}) \quad [\beta_7 + \beta_8 + \beta_9] \\
& + 5 \delta_j^i \partial_0 U \partial_0 U + U \partial_{ij} n_{ss} \quad [\beta_{10} + \beta_{11}] \\
& - \partial_j U \partial_i n_{ss} - \partial_j U \partial_i n_{00} \quad [\beta_{12} + \beta_{13}] \\
& - \partial_i U \partial_j n_{00} + \delta_j^i \partial_s U \partial_s n_{00} \quad [\beta_{14} + \beta_{15}] \\
& + 6 U \partial_{00} U \delta_j^i + 8 U \partial_i U \partial_j U \quad [\beta_{16} + \beta_{17}] \\
& - 9 U \partial_s U \partial_s U \delta_j^i. \quad [\beta_{18}]
\end{aligned}$$

Nous avons effectivement vérifié sur cette expression que la condition de divergence est satisfaite, comme il ressort de la première partie du théorème 1 (voir paragraphe 13, formule (13.1).

Bornons-nous au cas de deux particules. Soit (l, k) une permutation des indices $(1, 2)$, les contributions des divers termes de $A_{ij}^{(\mathcal{J})}$ dans l'intégrale

σ_i sont groupées dans le tableau suivant.

Tableau des intégrales de surface de

$$-\frac{1}{4\pi} \sigma_i^k = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_k} A_{ij}^{(\mathcal{J})} n^j d\Sigma.$$

	Expression	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6	β_7	β_8	β_9	β_{10}	β_{11}	β_{12}	β_{13}	β_{14}	β_{15}	β_{16}	β_{17}	β_{18}	Total
1	$k \sim {}^l k k$ $m_0 \partial_i U_{\xi s}^{\xi s}$	-1	$\frac{34}{15}$					$\frac{4}{-3}$	$\frac{4}{-5}$			$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{-15}$	$\frac{4}{-5}$			2
2	$k \sim {}^l l l$ $m_0 \partial_i U_{\xi s}^{\xi s}$												2	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{-3}$				3
3	$k \sim {}^l k l$ $m_0 \partial_i U_{\xi s}^{\xi s}$	$\frac{8}{-3}$		$\frac{16}{-3}$	$\frac{8}{-3}$	$\frac{8}{15}$		$\frac{4}{-5}$		$\frac{4}{3}$										-8
4	$k \sim {}^l k$ $m_0 \partial_i U_{\xi s}^{\xi s}$	$\frac{-2}{-3}$	$\frac{2}{-3}$						$\frac{-4}{-3}$	$\frac{4}{-3}$		$\frac{2}{-3}$	$\frac{-7}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{-3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{32}{3}$	$\frac{-6}{3}$	-8
5	$k \sim {}^l k$ $m_0 \partial_i U$	4				$\frac{4}{-3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$					1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{-3}$				10
6	$k \sim {}^l k l$ $m_0 \partial_s U_{\xi s}^{\xi s}$	4				$\frac{4}{-5}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{3}$											8
7	$k \sim {}^l k k$ $m_0 \partial_s U_{\xi s}^{\xi s}$	$\frac{26}{-3}$	$\frac{6}{5}$			$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{-3}$		$\frac{8}{-3}$	$\frac{-4}{15}$				$\frac{4}{15}$		$\frac{-4}{15}$	$\frac{12}{5}$			-8
8	$k \sim {}^l l k$ $m_0 \partial_s U_{\xi s}^{\xi s}$	4	$\frac{4}{3}$			$\frac{-4}{5}$		$\frac{8}{15}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{10}{-3}$									6
9	$k \sim {}^l l l$ $m_0 \partial_s U_{\xi s}^{\xi s}$	-4				$\frac{4}{3}$	$\frac{-4}{3}$	$\frac{4}{-3}$												-8
10	$k \sim {}^l l$ $m_0 \partial_{00} r$													-1	$\frac{1}{-6}$	$\frac{1}{6}$				-1

$$\left(\frac{\partial^3 r}{\partial \xi^s \partial \xi^r \partial \xi^i} = \frac{\frac{k}{\xi^s} \frac{k}{\xi^r} \frac{l}{\xi^i}}{\frac{k}{\xi^s} \frac{k}{\xi^r} \frac{k}{\xi^i}} \right).$$

On trouve :

$$(24.3) \quad \frac{k}{\sigma_i} = -8\pi G^2 m_0 \frac{l}{m_0} \left[\left(\frac{k}{\xi^s} \frac{k}{\xi^s} + \frac{3}{2} \frac{l}{\xi^s} \frac{l}{\xi^s} - 4 \frac{k}{\xi^s} \frac{l}{\xi^s} - 4 \frac{Gm_0}{r} - \right. \right. \\ \left. \left. - 5 \frac{Gm_0}{r} + A \right) \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(\frac{1}{r} \right) + \{ 4 \frac{k}{\xi^s} (\xi^i - \xi^i) + \right. \\ \left. \left. + 3 \frac{l}{\xi^s} \frac{k}{\xi^i} - 4 \frac{l}{\xi^s} \frac{l}{\xi^i} \} \frac{\partial}{\partial \xi^s} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 r}{\partial \xi^s \partial \xi^r \partial \xi^i} \frac{k}{\xi^s} \frac{k}{\xi^r} \right].$$

où r est la distance des deux particules. Les conditions :

$$(24.3) \quad \frac{1}{c^4} \frac{k}{\sigma_i} + \frac{1}{c^6} \frac{k}{\sigma_i} + 0 (1/c^8) = 0,$$

où $\frac{k}{\sigma_i}$ et $\frac{k}{\sigma_i}$ ont les valeurs (22.10) et (24.3) fournissent les équations de mouvement en seconde approximation.

$$(24.5) \quad \frac{k}{\xi^i} - Gm_0 \frac{l}{\frac{k}{\partial \xi^i}} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{1}{c^2} Gm_0 \times \\ \times \left[\left(\frac{k}{\xi^s} \frac{k}{\xi^s} + \frac{3}{2} \frac{l}{\xi^s} \frac{l}{\xi^s} - 4 \frac{k}{\xi^s} \frac{l}{\xi^s} - 4 \frac{Gm_0}{r} - 5 \frac{Gm_0}{r} + A \right) \frac{\partial}{\partial \xi^s} \left(\frac{1}{r} \right) + \right. \\ \left. + \{ 4 \frac{k}{\xi^s} (\xi^i - \xi^i) + 3 \frac{k}{\xi^i} \frac{l}{\xi^s} - 4 \frac{l}{\xi^s} \frac{l}{\xi^i} \} \frac{\partial}{\partial \xi^s} \left(\frac{1}{r} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 r}{\partial \xi^s \partial \xi^r \partial \xi^i} \frac{k}{\xi^s} \frac{k}{\xi^r} \right] + 0 (1/c^4).$$

Le terme $\frac{l}{A}$ est nouveau, les autres termes sont les mêmes que ceux obtenus par EINSTEIN, INFELD et HOFFMANN.

25. — Influence de la masse.

Les équations (24.5) sont écrites avec la masse m_0 . Bien que la masse $m_0 u^0 \sqrt{-a}$ soit la plus conservative le long des lignes de courant ⁽¹³⁾, nous ne l'employons pas ici. En effet, elle ne se présente pas d'une façon naturelle dans notre méthode ⁽¹⁴⁾.

La masse $M = m_0 u^0 \sqrt{-a}$ généralise celle de la relativité restreinte :

$$m_0 u^0 \sqrt{-a} = m_0 \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{v^2}{2} - 3U \right) \right] + O(1/c^4).$$

Si l'on utilise cette masse, on aura en plus le terme suivant au second membre de (24.5) :

$$\frac{1}{c^2} G M^l \left(\frac{\overset{l}{\xi^s} \overset{l}{\xi^s}}{2} + 3 \frac{\overset{k}{GM}}{2} \right).$$

⁽¹³⁾ F. HENNEQUIN. Thèse, Paris (1956) p. 27-29.

⁽¹⁴⁾ EINSTEIN considère la masse :

$$m = m_0 + \frac{1}{c^2} m_2 + \frac{1}{c^4} m_4 + \dots = m_0 \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{v^2 + U}{2} \right) \right] + O(1/c^4)$$

où les $m_2, m_4, \dots$ sont déterminés par l'équation $\overset{k}{\sigma}_0 = 0$.

LA MÉTHODE DES SINGULARITÉS POUR LES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT EN RELATIVITÉ GÉNÉRALE ET EN THEORIE DU CHAMP UNIFIÉ

par PHAM TAN HOANG (Paris)

CHAPITRE III

LA THÉORIE DU CHAMP UNIFIÉ D'EINSTEIN-SCHRÖDINGER ET QUELQUES-UNS DE SES DÉVELOPPEMENTS.

En relativité générale, le champ électromagnétique est représenté par un champ de tenseurs antisymétriques $F_{\alpha\beta}$ défini sur l'espace-temps riemannien dont la métrique est fournie par le champ gravitationnel. Les équations de l'électromagnétisme sont constituées par les deux groupes d'équations de MAXWELL et d'EINSTEIN. Mais il y a séparation des deux champs, et le champ électromagnétique n'intervient pas directement dans la définition de la structure géométrique de l'univers. D'autre part les sources (matière et charges) apparaissent comme une notion étrangère à celle de champ. Or les lois de propagation des deux champs électromagnétique et gravitationnel sont identiques. On est naturellement amené à les unifier, mais cette unification est plus complexe que la fusion des champs électrique et magnétique en relativité restreinte.

Une théorie unitaire du champ est une théorie qui groupe les champs électromagnétique et gravitationnel en un même hyperchamp susceptible de décrire la structure géométrique de l'univers. Les différents essais ont abouti soit aux théories pentadimensionnelles, soit aux théories dites à connexion affine. La théorie d'EINSTEIN-SCHRÖDINGER dont il est question ici est une théorie à connexion affine.

I. — VARIÉTÉ À CONNEXION AFFINE.

26. — Définition d'une connexion affine.

Considérons une variété différentiable V_n de dimension n , de classe C^r ($r \geq 2$) et un recouvrement arbitraire de cette variété par des voisinages ouverts U . Donnons-nous dans chaque U un ensemble ordonné de n formes de Pfaff $(\theta^a(x))$ de classe C^{r-1} linéairement indépendantes. Ces formes définissent pour chaque x de U un corepère θ_x^U de l'espace vectoriel T_x^* des formes linéaires au point x , et par dualité un repère R_U^x de l'espace vectoriel T_x des vecteurs tangents en x à V_n .

Si U et V sont deux voisinages de V_n et si $x \in U \cap V$, il existe une matrice $n \times n$ régulière $A_V^U(x)$, de classe C^{r-1} telle que :

$$(26.1) \quad \theta_x^U = A_V^U \theta_x^V \quad (x \in U \cap V)$$

et :

$$(26.2) \quad R_V^x = R_U^x A_V^U$$

et l'on a $A_V^{-1} = A_U^V$.

Une *connexion affine* sur V_n est définie par la donnée dans tout voisinage muni de repères, d'une matrice ω_U de formes de Pfaff, de classe C^{r-1} , telle que pour $x \in U \cap V$ on ait :

$$(26.3) \quad \omega_V = A_V^{-1} \omega_U A_V^U + A_{UV} \quad (A_{UV} = A_V^{-1} d A_V^U).$$

Soient U, V, W trois voisinages de V_n . Pour $x \in U \cap V \cap W$, on a trois matrices $\omega_U, \omega_V, \omega_W$. Ces matrices satisfont deux à deux à des relations du type (26.3) et la définition n'est pas contradictoire en elle-même.

Sur une variété différentiable V_n il existe une infinité de connexions affines. A partir d'un recouvrement dénombrable de V_n , on peut en construire une directement, par induction sur les voisinages. Une variété différentiable de classe C^r munie d'une connexion affine de classe C^{r-2} est dite une variété à connexion affine de classe C^{r-2} .

La formule (26.3) peut s'écrire sous forme explicite :

$$(26.4) \quad \omega_{\mu'}^{\lambda'} = A_a^{\lambda'} \omega_{\mu'}^a + A_a^{\lambda'} d A_{\mu'}^a \quad (x \in U \cap V).$$

On reconnaît sur (26.4) la loi de transformation dans un changement de repère des formes locales définissant une connexion riemannienne. Les

coefficients $\gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ définis par :

$$\omega_\beta^\alpha = \gamma_{\beta\gamma}^\alpha \theta^\gamma \quad (x \in U)$$

sont dits les coefficients de la connexion affine envisagée au point x et pour les repères θ_x et R^x choisis. D'après (26.4) ces coefficients se transforment selon la loi :

$$(26.5) \quad \gamma_{\mu'\varrho'}^{\lambda'} = A_a^{\lambda'} A_{\mu'}^\beta A_{\varrho'}^\gamma \gamma_{\beta\gamma}^\alpha + A_\sigma^{\lambda'} \partial_{\varrho'} A_{\mu'}^\sigma$$

où $\partial_{\varrho'}$ désigne la dérivée pfaffienne des A par rapport à $\theta^{\varrho'}$.

Il résulte de la formule de transformation (26.5) la propriété suivante :

Etant donné sur V_n une connexion affine, on obtient toutes les autres par addition à ses coefficients des composantes d'un tenseur arbitraire d'ordre 3 une fois contravariant, deux fois covariant.

27. — Torsion et courbure d'une variété à connexion affine.

Considérons dans chaque voisinage U la matrice à une ligne

$$\Sigma^U = d\theta^U + \omega_U \wedge \theta^U$$

et la matrice $n \times n$

$$\Omega_U = d\omega_U + \omega_U \wedge \omega_U$$

dont les éléments sont des formes différentielles quadratiques extérieures locales.

Les éléments de ces matrices sont donnés explicitement par :

$$\Sigma^\alpha = d\theta^\alpha + \omega_\varrho^\alpha \wedge \theta^\varrho$$

$$\Omega_\beta^\alpha = d\omega_\beta^\alpha + \omega_\varrho^\alpha \wedge \omega_\beta^\varrho.$$

Posons :

$$\Sigma^\alpha = -S_{\beta\gamma}^\alpha \theta^\beta \wedge \theta^\gamma \quad (S_{\beta\gamma}^\alpha = -S_{\gamma\beta}^\alpha).$$

On montre que les Σ^α et les Ω_β^α définissent des formes tensorielles respectivement de type vectoriel et de type (1,1). Il en résulte que les $S_{\beta\gamma}^\alpha$ sont les composantes d'un tenseur d'ordre 3, antisymétrique par rapport aux indices inférieurs. Ce tenseur est dit tenseur de torsion de la variété.

De même, si on pose :

$$\Omega_{\beta}^{\alpha} = -\frac{1}{2} R_{\beta, \lambda \mu}^{\alpha} \theta^{\lambda} \wedge \theta^{\mu}$$

les $R_{\beta, \lambda \mu}^{\alpha}$ sont les composantes d'un tenseur d'ordre 4 antisymétrique par rapport à λ et μ . C'est le tenseur de courbure de la variété.

28. — Différentielle absolue et dérivée covariante dans une connexion affine.

Considérons un champ de vecteurs contravariants. Ses composantes sont définies dans chaque voisinage U par la matrice à une ligne v^U ; pour $x \in U \cap V$, on a :

$$(28.1) \quad v^V = A_U^V v^U.$$

D'après (28.1) et (26.3), on établit que les quantités :

$$D v^U = d v^U + \omega_U v^U$$

définissent une forme différentielle linéaire à valeur vectorielle contravariante qui est dite la différentielle absolue du champ de vecteurs relativement à la connexion.

La matrice $D v^U$ a pour éléments :

$$D v^{\alpha} = d v^{\alpha} + \omega_e^{\alpha} v^e.$$

Si l'on pose :

$$D v^{\alpha} = D_{\beta} v^{\alpha} \theta^{\beta},$$

la dérivée covariante est le tenseur qui a pour composantes :

$$D_{\beta} v^{\alpha} = \partial_{\beta} v^{\alpha} + \gamma_{e\beta}^{\alpha} v^e$$

où ∂_{β} représente une dérivée pfaffienne.

Plus généralement on peut établir pour un champ de tenseurs qu'on peut construire une forme différentielle linéaire à valeur tensorielle, qui est dite la différentielle absolue du tenseur pour la connexion envisagée.

Si, par exemple, nous considérons un champ de tenseurs une fois covariant, une fois contravariant, nous aurons sous forme explicite :

$$D t_{\beta}^{\alpha} = d t_{\beta}^{\alpha} + \omega_e^{\alpha} t_{\beta}^e - \omega_{\beta}^e t_e^{\alpha}.$$

La dérivée covariante correspondante est :

$$D_{\gamma} t^{\alpha}_{\beta} = \partial_{\gamma} t^{\alpha}_{\beta} + \gamma^{\alpha}_{\varrho\gamma} t^{\varrho}_{\beta} - \gamma^{\varrho}_{\beta\gamma} t^{\alpha}_{\varrho}.$$

Dans ces expressions la forme générale de la différentielle absolue apparaît.

29. — Formules en repères de coordonnées locales.

En repères naturels associés aux coordonnées locales $(\theta^U_x = (dx^a))$, nous introduirons la notation spéciale :

$$\omega^{\alpha}_{\beta} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} dx^{\gamma}$$

pour désigner les coefficients de la connexion affine. Dans un changement de repères naturels, ces coefficients se transforment toujours selon la formule

$$\Gamma^{\lambda'}_{\mu'\varrho'} = A^{\lambda'}_{\alpha} A^{\beta}_{\mu'} A^{\alpha}_{\varrho} \gamma^{\beta}_{\beta\gamma} + A^{\lambda'}_{\sigma} \partial_{\varrho'} A^{\sigma}_{\mu'}.$$

Mais $A^{\alpha}_{\beta'}$ et $A^{\beta'}_{\alpha}$ ont maintenant les valeurs particulières

$$A^{\alpha}_{\beta'} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\beta'}}, \quad A^{\beta'}_{\alpha} = \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^{\alpha}}$$

et $\partial_{\varrho'}$ désigne maintenant la dérivée partielle ordinaire de $A^{\sigma}_{\mu'}$ par rapport à $x^{\varrho'}$ (donc $\partial_{\varrho'} A^{\sigma}_{\mu'} = \partial_{\mu'} A^{\sigma}_{\varrho'}$).

En repères naturels, les composantes du tenseur de torsion et du tenseur de courbure sont données explicitement en fonction des coefficients $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ de la connexion par :

$$(29.1) \quad S^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} (\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} - \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}) = \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} \quad (\vee \text{ symbole d'antisymétrisation})$$

$$(29.2) \quad R^{\alpha}_{\beta,\lambda\mu} = \partial_{\mu} \Gamma^{\alpha}_{\beta\lambda} - \partial_{\lambda} \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\varrho\mu} \Gamma^{\varrho}_{\beta\lambda} - \Gamma^{\alpha}_{\varrho\lambda} \Gamma^{\varrho}_{\beta\mu}.$$

Du tenseur de torsion $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$, on déduit par contraction le vecteur de torsion :

$$(29.3) \quad \Gamma_{\beta} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha}.$$

Par contraction du tenseur de courbure on peut obtenir deux tenseurs covariants d'ordre 2 essentiellement distincts. L'un de ces tenseurs généralise

le tenseur de RICCI de la géométrie riemannienne; il est défini par :

$$(29.4) \quad R_{\lambda\mu} = R_{\lambda,\mu\alpha}^{\alpha} = \partial_{\sigma} \Gamma_{\lambda\mu}^{\sigma} - \partial_{\mu} \Gamma_{\lambda\sigma}^{\sigma} + \Gamma_{\rho\sigma}^{\sigma} \Gamma_{\lambda\mu}^{\rho} - \Gamma_{\rho\mu}^{\sigma} \Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho}.$$

Ce tenseur ne présente en général aucun caractère de symétrie particulier.

Le second tenseur est obtenu en contractant α et β dans la relation (29.2):

$$(29.5) \quad V_{\lambda\mu} = R_{\alpha,\lambda\mu}^{\alpha} = \partial_{\mu} \Gamma_{\alpha\lambda}^{\alpha} - \partial_{\lambda} \Gamma_{\alpha\mu}^{\alpha}.$$

Ce tenseur est manifestement nul dans le cas d'une connexion riemannienne. Dans le cas d'une connexion affine quelconque il est le rotationnel d'un champ de vecteurs.

II. — LES ÉQUATIONS DU CHAMP UNIFIÉ.

30. — La variété fondamentale.

L'élément primitif de la théorie d'Einstein-Schrödinger est constitué par une variété espace-temps V_4 douée de la même structure de variété différentiable que la variété qui intervient en relativité générale: la variété V_4 est donc une variété différentiable de classe $(C^2, C^4$ par morceaux).

Sur cette variété V_4 nous supposons définis deux éléments géométriques :

1) Un champ de tenseurs $g_{\alpha\beta}$ de classe $(C^1, C^3$ par morceaux). En chaque point x de V_4 nous supposons :

a) que $g = \det(g_{\alpha\beta}) \neq 0$;

b) que la forme quadratique $\Phi(X) = g_{\alpha\beta} X^{\alpha} X^{\beta}$ est une forme non dégénérée de type hyperbolique normal.

Le tenseur $g_{\alpha\beta}$ est dit le tenseur fondamental.

2) Une connexion affine arbitraire dont les coefficients $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ sont continus et de classe C^2 par morceaux.

Comme $g \neq 0$ la matrice $(g_{\alpha\beta})$ admet une matrice inverse, notée $(g^{\alpha\beta})$, telle que :

$$g_{\alpha\varrho} g^{\varrho\beta} = g_{\varrho\alpha} g^{\varrho\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta}$$

$$(\delta_{\alpha}^{\beta} = 0 \text{ pour } \alpha \neq \beta, = 1 \text{ pour } \beta = \alpha).$$

Les tenseurs $g_{\alpha\beta}$ et $g^{\alpha\beta}$ sont dits des tenseurs associés. On a :

$$\det(g^{\alpha\beta}) = \frac{1}{g} \neq 0,$$

Dans la suite nous désignerons par la même lettre d'appui — ici g — deux tenseurs associés l'un covariant, l'autre contravariant et le déterminant des composantes du tenseur covariant.

Nous poserons :

$$g_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta} + \varphi_{\alpha\beta}; \quad g^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta} + f^{\alpha\beta}$$

où :

$$\gamma_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}, \quad \varphi_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}; \quad h^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}, \quad f^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}$$

sont des tenseurs soit symétriques, soit antisymétriques ($_$ est le symbole de symétrisation, $_$ celui d'antisymétrisation).

D'après l'hypothèse b), on montre que les formes quadratiques $\gamma_{\alpha\beta} X^\alpha X^\beta$ et $h^{\alpha\beta} X_\alpha X_\beta$ sont non dégénérées de type hyperbolique normal. En particulier on a :

$$\gamma = \det(\gamma_{\alpha\beta}) < 0,$$

$$\frac{1}{h} = \det(h^{\alpha\beta}) < 0.$$

Le déterminant de $g^{\alpha\beta}$ peut être exprimé en fonction des déterminants de $h^{\alpha\beta}, f^{\alpha\beta}$ suivant : (Of. [11], p. 15)

$$(30.1) \quad \frac{1}{g} = \frac{1}{h} + \frac{1}{f} + \frac{1}{2h} h_{\mu\nu} h_{\rho\sigma} f^{\mu\nu} f^{\rho\sigma},$$

et la dérivée logarithmique de $|g|$ est donnée par la formule :

$$\frac{\partial_e \sqrt{|g|}}{\sqrt{|g|}} = \frac{1}{2} \partial_e \text{Log } |g| = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_e g_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \partial_e g^{\alpha\beta}.$$

31. — Le principe variationnel.

Les deux éléments géométriques définis sur la variété V_4 (tenseur fondamental et connexion affine) sont astreints aux « équations du champ » que nous allons déduire, par analogie avec la relativité générale, d'un principe variationnel.

Soit C une chaîne différentiable de dimension 4 de la variété et variations arbitrairement le tenseur fondamental et la connexion de façon que les variations soient nulles au bord ∂C de la chaîne envisagée. Considérons

la variation correspondante de l'intégrale à valeur scalaire :

$$I = \int_C g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \sqrt{|g|} dx^0 \wedge \dots \wedge dx^3,$$

où $R_{\alpha\beta}$ est le tenseur de RICCI de la connexion affine $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$.

Les équations du champ de la théorie sont celles qui définissent l'extremum de l'intégrale I vis-à-vis de toutes variations du tenseur fondamental et de la connexion astreintes seulement à s'annuler au bord de C .

On évalue la variation de I en distinguant la contribution due à la variation de la connexion et celle due à la variation du tenseur fondamental. On obtient ainsi le système :

$$(31.1) \quad G_e^{\alpha\beta} = D_e g^{\alpha\beta} - \left(\Gamma_{e\sigma}^\sigma - \frac{1}{2} \partial_e \text{Log} |g| \right) g^{\alpha\beta} + 2g^{\alpha\sigma} \Gamma_{e\sigma}^\beta + \frac{2}{3} \delta_e^\beta g^{\alpha\sigma} \Gamma_\sigma = 0,$$

$$(31.2) \quad R_{\alpha\beta} = 0.$$

C'est la première forme des équations du champ.

Pour simplifier la forme des équations (31.1) nous allons substituer à la connexion initiale $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ une nouvelle connexion affine. On démontre qu'étant donnée une connexion affine arbitraire $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$, il existe une connexion affine et une seule définissant le même parallélisme et dont le vecteur covariant de torsion est nul. Cette connexion est :

$$(31.3) \quad L_{\beta\gamma}^\alpha = \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha + \frac{2}{3} \delta_\beta^\alpha \Gamma_\gamma.$$

En explicitant $G_e^{\alpha\beta}$ à l'aide de la nouvelle connexion L , on trouve que le premier système des équations du champ (31.1) est équivalent au système :

$$(31.4) \quad \partial_e g^{\alpha\beta} + L_{e\sigma}^\alpha g^{\sigma\beta} + L_{e\sigma}^\beta g^{\alpha\sigma} = 0,$$

$$(31.5) \quad \partial_e (\sqrt{-g} g^{e\beta}) = 0.$$

Les quatre conditions (31.5) ne sont autres que les conditions $L_\beta = 0$ exprimant que la connexion L est astreinte à admettre un vecteur de torsion nul. En effet on déduit de (31.4) :

$$2\partial_e g^{e\beta} + L_{e\sigma}^\sigma g^{e\beta} - L_{e\sigma}^\sigma g^{\beta e} = 0.$$

Or :

$$L_{\sigma\sigma}^{\sigma} g^{e\beta} - L_{\sigma e}^{\sigma} g^{\beta e} = L_e g^{e\beta} + 2 L_{\sigma e}^{\sigma} g^{e\beta} \quad \left(L_{\sigma e}^{\sigma} = \frac{\partial_e \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} \right).$$

On obtient donc :

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_e (\sqrt{-g} g^{e\beta}) = -\frac{1}{2} L_e g^{e\beta}.$$

Or $\det(g^{a\beta}) \neq 0$. Aussi, pour que le vecteur de torsion L_e soit nul il faut et il suffit que l'on ait (31.5).

Aux formules (31.4) on peut substituer les formules équivalentes :

$$(31.6) \quad \partial_e g_{\alpha\beta} - L_{\alpha e}^{\sigma} g_{\sigma\beta} - L_{e\beta}^{\sigma} g_{\alpha\sigma} = 0.$$

Désignons par $W_{\alpha\beta}$ le tenseur de RICCI de la connexion L . On peut évaluer le tenseur $R_{\alpha\beta}$ à partir de $W_{\alpha\beta}$ suivant la relation :

$$(31.7) \quad R_{\alpha\beta} = W_{\alpha\beta} - \frac{2}{3} (\partial_{\alpha} \Gamma_{\beta} - \partial_{\beta} \Gamma_{\alpha}).$$

Il résulte qu'on peut substituer aux équations (31.2) portant sur la connexion Γ les équations :

$$(31.8) \quad W_{\alpha\beta} - \frac{2}{3} (\partial_{\alpha} \Gamma_{\beta} - \partial_{\beta} \Gamma_{\alpha}) = 0.$$

Nous sommes ainsi conduits à adopter comme nouvelles grandeurs déterminant le champ unitaire, outre le tenseur fondamental $g_{\alpha\beta}$, la connexion affine a priori arbitraire $L_{\beta\gamma}^{\alpha}$ et le vecteur covariant Γ_{α} . Les « équations du champ » sont alors fournies par les équations (31.5), (31.6) et (31.8) :

$$(31.9) \quad \partial_e g_{\alpha\beta} - L_{\alpha e}^{\sigma} g_{\sigma\beta} - L_{e\beta}^{\sigma} g_{\alpha\sigma} = 0,$$

$$(31.10) \quad \partial_e (\sqrt{-g} g^{e\beta}) = 0,$$

$$(31.11) \quad W_{\alpha\beta} - \frac{2}{3} (\partial_{\alpha} \Gamma_{\beta} - \partial_{\beta} \Gamma_{\alpha}) = 0.$$

Les grandeurs du champ comprennent 16 $g_{\alpha\beta}$, 64 $L_{\beta\gamma}^{\alpha}$ et 4 Γ_{α} et nous disposons effectivement de 4 équations (31.10), de 64 équations (31.9) et de 16 équations (31.11). Mais ces équations ne sont pas indépendantes ; le procédé variationnel utilisé pour leur formation fournit 4 « identités de conservation » qui assurent comme en relativité générale le jeu des changements de coordonnées admissibles.

Ces identités font intervenir un tenseur M_e^λ formé à partir de $g_{\alpha\beta}$ et du tenseur de RICCI par :

$$(31.12) \quad 2 L_e^\lambda = R_{e\sigma} g^{\lambda\sigma} + R_{\sigma e} g^{\sigma\lambda},$$

$$(31.13) \quad M_e^\lambda = L_e^\lambda - \frac{1}{2} \delta_e^\lambda L_\tau^\tau.$$

Elles peuvent s'écrire :

$$(31.14) \quad \partial_\lambda (\sqrt{-g} M_e^\lambda) + \frac{1}{2} R_{\alpha\beta} \partial_e (\sqrt{-g} g^{\alpha\beta}) = 0,$$

généralisant ainsi celles classiques de la relativité générale. On établit que les identités (31.14) sont satisfaites pour tout ensemble $(g_{\alpha\beta}, L_{\alpha\beta}^e)$ déduit par (31.3) d'une solution $(g_{\alpha\beta}, L_{\alpha\beta}^e)$ des équations (31.9), (31.10).

On peut donner aux identités de conservation une deuxième forme qui porte sur le tenseur de RICCI $W_{\alpha\beta}$ et qui est tout à fait analogue à (31.14).

32. — Le problème de Cauchy.

Les équations :

$$(32.1) \quad \partial_\sigma g_{\lambda\mu} - L_{\lambda e}^\sigma g_{\sigma\mu} - L_{e\mu}^\sigma g_{\lambda\sigma} = 0$$

constituent une extension au cas d'un tenseur $g_{\alpha\beta}$ non symétrique et d'une connexion non symétrique des relations classiques qui déterminent, à partir de la métrique, les coefficients d'une connexion riemannienne.

M. A. TONNELAT a résolu explicitement le système des équations (32.1) où les coefficients de la connexion sont considérés comme les inconnues. Elle a montré que la solution existe et est unique pourvu que :

$$(32.2) \quad g \left[\left(2 - \frac{g}{\gamma} + \frac{6\varphi}{\gamma} \right)^2 - \frac{4\varphi}{\gamma} \left(3 - \frac{g}{\gamma} + \frac{\varphi}{\gamma} \right)^2 \right] \neq 0.$$

Pour un tenseur $g_{\alpha\beta}$ satisfaisant aux hypothèses faites au paragraphe 30, le seul cas exceptionnel est donc celui où l'on a simultanément :

$$\varphi = 0 \quad g = 2\gamma.$$

Nous écartons ce cas dans la suite, parce qu'il ne se produit pas dans la pratique. On peut alors prendre comme grandeurs qui définissent le champ le tenseur fondamental $g_{\alpha\beta}$ et le vecteur covariant L_α , ces grandeurs

satisfaisant aux équations :

$$(32.3) \quad \partial_e (\sqrt{-g} g^{e\beta}) = 0 ,$$

$$(32.4) \quad W_{\alpha\beta} - \frac{2}{3} (\partial_\alpha \Gamma_\beta - \partial_\beta \Gamma_\alpha) = 0 ,$$

où les $L_{\beta\gamma}^\alpha$ sont considérés comme les fonctions des $g_{\alpha\beta}$ et de leurs dérivées premières définies par la solution unique du système (32.1).

L'étude du problème de Cauchy montre que le système des équations (32.3) (32.4) vérifiées par les $g_{\lambda\mu}$ et Γ_α admet en général une solution déterminée localement. Les données de Cauchy sont les valeurs de $g_{\lambda\mu}$, $\partial_\gamma g_{\lambda\mu}$, Γ_α sur une hypersurface S de V_4 . La solution existe et elle est unique si l'hypersurface est non caractéristique et si les données de Cauchy sont liées par un ensemble de conditions provenant des équations du champ. Les variétés caractéristiques sont définies comme solutions de l'une ou de l'autre des deux équations suivantes :

$$h^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \partial_\beta f = 0 ,$$

$$(h^{\alpha\beta} - 2 \frac{\gamma}{g} \gamma^{\alpha\beta}) \partial_\alpha f \partial_\beta f = 0 .$$

Elles apparaissent comme les surfaces d'ondes du champ unifié envisagé. Les rayons associés sont les caractéristiques des équations précédentes, c'est-à-dire les géodésiques de longueur nulle des métriques riemanniennes de signature hyperbolique normale :

$$ds^2 = h_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta ,$$

$$d\bar{s}^2 = \bar{\gamma}_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta ,$$

où $h_{\alpha\beta}$ et $\bar{\gamma}_{\alpha\beta}$ sont respectivement les tenseurs associés de $h^{\alpha\beta}$ et

$$(h^{\alpha\beta} - 2 \frac{\gamma}{g} \gamma^{\alpha\beta}) .$$

L'interprétation physique des grandeurs géométriques introduites est difficile dans la théorie d'EINSTEIN-SCHRÖDINGER. De par le caractère unitaire même de la théorie, les équations rigoureuses régissent ici un hyperchamp non décomposable et ne peuvent être fractionnées en équations de propagation du champ gravitationnel et du champ électromagnétique qu'approximativement, lorsque les conditions physiques sont telles que l'un des champs est prépondérant par rapport à l'autre.

III. — INTERPRÉTATION POSSIBLE DES ÉQUATIONS FONDAMENTALES

33. — Les conditions d'isothermie dans le choix de la métrique.

Le problème de Cauchy conduit à considérer que c'est le tenseur $h_{\alpha\beta}$ ou un tenseur proportionnel qui doit définir la partie gravitationnelle du champ unifié. Posons :

$$a_{\alpha\beta} = \mathcal{I} h_{\alpha\beta},$$

$\mathcal{I}$ désignant le coefficient invariant de proportionnalité. La valeur de $\mathcal{I}$ peut s'obtenir par la considération des coordonnées isothermes.

Dans la variété V_4 de la théorie unitaire, la condition d'isothermie prend la forme :

$$(33.1) \quad g^{\alpha\beta} L_{\alpha\beta}^e = 0,$$

et dans l'espace riemannien de métrique $a_{\alpha\beta}$ elle s'écrit :

$$(33.2) \quad a^{\alpha\beta} \left\{ \begin{matrix} e \\ \alpha \quad \beta \end{matrix} \right\} = 0.$$

Considérons alors le premier groupe d'équations du champ :

$$(33.3) \quad \partial_e g^{\alpha\beta} + L_{\sigma e}^{\alpha} g^{\sigma\beta} + L_{e\sigma}^{\beta} g^{\alpha\sigma} = 0,$$

$$(33.4) \quad \partial_e (\sqrt{-g} g^{e\beta}) = 0.$$

On déduit par contraction de l'équation (33.3) :

$$\begin{aligned} g^{e\sigma} L_{e\sigma}^{\beta} &= -\partial_e g^{e\beta} - g^{\sigma\beta} L_{\sigma e}^e \\ &= -\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_e (\sqrt{-g} g^{e\beta}). \end{aligned}$$

Tenant compte de (33.4) et de l'identité :

$$a^{\alpha\beta} \left\{ \begin{matrix} e \\ \alpha \quad \beta \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{\sqrt{-a}} \partial_a (\sqrt{-a} a^{\alpha\beta}),$$

on peut donc mettre le premier membre de (33.1) sous la forma :

$$(33.5) \quad g^{e\sigma} L_{e\sigma}^{\beta} = \mathcal{I} \left(a^{e\sigma} \left\{ \begin{matrix} \beta \\ e \quad \sigma \end{matrix} \right\} \right) - \left[\frac{a}{g} a^{e\beta} \partial_e \left(\sqrt{\frac{g}{a}} \mathcal{I} \right) \right].$$

Il en résulte qu'on a l'énoncé :

En vertu du premier groupe d'équations du champ (33.4), (33.5), l'invariant $\mathcal{I}$ est entièrement déterminé par les deux conditions suivantes :

1) les équations (33.1) et (33.2) sont équivalentes ;

2) si $f^{\alpha\beta} \rightarrow 0$, le premier membre de (33.1) se réduit au premier membre de (33.2).

La condition 1) donne

$$\mathcal{I} = \lambda \sqrt{a/g} = \lambda \sqrt{g/h}$$

(λ scalaire constant) et la condition 2) montre que la constante λ est égal à 1. Il vient donc :

$$(33.6) \quad a_{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{g}{h}} h_{\alpha\beta},$$

$h_{\alpha\beta}$ désignant le tenseur associé de $h^{\alpha\beta}$ ($= g^{\alpha\beta}$) et $h = \det(h_{\alpha\beta})$.

Désormais, la notation $a_{\alpha\beta}$ désignera toujours, sauf indication contraire (Cf. chapitre V, paragraphe 49), le tenseur au second membre de (33.6). La métrique $a_{\alpha\beta}$ est, comme la métrique $h_{\alpha\beta}$, de type hyperbolique normal. Notons que $a = \det(g_{\alpha\beta})$.

Remarque. — Si l'on ne tient pas compte de (33.2) mais seulement de (33.1) on a :

$$g^{\mu\nu} L_{\mu\nu}^{\sigma} = \sqrt{\frac{g}{h}} a^{\mu\nu} \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu \quad \nu \end{matrix} \right\} + f^{\sigma\tau} \Gamma_{\tau}.$$

34. — Le tenseur $q^{\alpha\beta}$ et sa signification.

Par analogie avec $a^{\alpha\beta} = \sqrt{h/g} h^{\alpha\beta}$, nous introduirons dans la suite le tenseur antisymétrique :

$$(34.1) \quad q^{\alpha\beta} = \sqrt{h/g} f^{\alpha\beta} \quad (f^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}).$$

On a :

$$(34.2) \quad g^2 = ah, \quad \frac{h}{f} = \frac{a}{q},$$

et, d'après (30.1) :

$$(34.3) \quad \frac{g}{a} = 1 + \frac{a}{q} + \frac{1}{2} a_{\mu\varrho} a_{\nu\sigma} q^{\mu\nu} q^{\varrho\sigma}.$$

Notons que :

$$\sqrt{-g} f^{\alpha\beta} = \sqrt{-a} q^{\alpha\beta}.$$

Aussi l'équation (33.4) peut s'écrire encore :

$$(34.4) \quad \nabla_e q^{e\beta} = 0,$$

∇_α étant l'opérateur de dérivation covariante dans la métrique $a_{\alpha\beta}$.

Ainsi :

Dans la variété riemannienne munie de la métrique

$$ds^2 = a_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta,$$

le tenseur $q^{\alpha\beta}$, défini par (34.1), est l'adjoint d'un tenseur rotationnel.

Il existe localement un potentiel-vecteur ψ_α tel que :

$$q_{\alpha\beta}^* = \partial_\alpha \psi_\beta - \partial_\beta \psi_\alpha,$$

et l'expression explicite de $q^{\alpha\beta}$ en fonction de ψ_λ est donnée par :

$$(34.5) \quad q^{\alpha\beta} = \frac{1}{2\sqrt{-a}} \varepsilon^{\lambda\mu\alpha\beta} q_{\lambda\mu}^* = \frac{1}{\sqrt{-a}} \varepsilon^{\lambda\mu\alpha\beta} \partial_\lambda \psi_\mu.$$

35. — Décomposition du tenseur de Ricci. Forme rigoureuse des équations du champ.

Le tenseur de RICCI $W_{\alpha\beta}$ peut être séparé en deux parties : l'une est formée par le tenseur de RICCI $G_{\alpha\beta}$ d'une connexion riemannienne $\left\{ \begin{smallmatrix} \varrho \\ \alpha \beta \end{smallmatrix} \right\}$ quelconque, l'autre s'exprime simplement en fonction de la différence des coefficients de connexion $L_{\alpha\beta}^\varrho - \left\{ \begin{smallmatrix} \varrho \\ \alpha \beta \end{smallmatrix} \right\}$. Cette décomposition fait jouer au tenseur symétrique à deux indices qui définit la connexion riemannienne envisagée, le rôle de tenseur gravitationnel. Nous prendrons donc ce tenseur symétrique égal à $a_{\alpha\beta}$ défini par la formule (33.6).

Posons :

$$(35.1) \quad L_{\beta\gamma}^\alpha = \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \gamma \end{smallmatrix} \right\} + \theta_{\beta\gamma}^\alpha,$$

$$(35.2) \quad \vartheta_{\beta\gamma}^\alpha = w_{\beta\gamma}^\alpha + \underbrace{L_{\beta\gamma}^\alpha}_{\sim} \quad (w_{\beta\gamma}^\alpha = w_{\gamma\beta}^\alpha).$$

En portant (35.1) dans l'expression de $W_{\alpha\beta}$, on trouve :

$$(35.3) \quad W_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta} + \nabla_{\alpha} \theta_{\alpha\beta}^{\sigma} - \frac{1}{2} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} \text{Log} |g| + \theta_{\sigma\alpha}^{\sigma} \theta_{\alpha\beta}^{\sigma} - \theta_{\sigma\beta}^{\sigma} \theta_{\alpha\sigma}^{\sigma},$$

où ∇_{α} désigne l'opérateur de dérivation covariante dans la connexion riemannienne. (On a $\theta_{\alpha\sigma}^{\sigma} = w_{\alpha\sigma}^{\sigma} = \frac{1}{2} \nabla_{\alpha} \text{Log} |g|$).

Nous pouvons utiliser (35.2) pour scinder $W_{\alpha\beta}$ en parties symétrique et antisymétrique suivant :

$$(35.4) \quad \underline{W}_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta} + \nabla_{\alpha} w_{\alpha\beta}^{\sigma} - \frac{1}{2} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} \text{Log} |g| + w_{\sigma\alpha}^{\sigma} w_{\alpha\beta}^{\sigma} - (w_{\sigma\beta}^{\sigma} w_{\alpha\sigma}^{\sigma} + \underline{L}_{\sigma\beta}^{\sigma} \underline{L}_{\alpha\sigma}^{\sigma}),$$

$$(35.5) \quad \underline{W}_{\alpha\beta} = \nabla_{\alpha} \underline{L}_{\alpha\beta}^{\sigma} + w_{\sigma\alpha}^{\sigma} \underline{L}_{\alpha\beta}^{\sigma} - (w_{\sigma\beta}^{\sigma} \underline{L}_{\alpha\sigma}^{\sigma} + w_{\alpha\sigma}^{\sigma} \underline{L}_{\sigma\beta}^{\sigma}).$$

Ces formules permettent d'écrire les équations du champ sous forme rigoureuse.

CHAPITRE IV

EXTENSION DE LA MÉTHODE DES SINGULARITÉS
À LA THÉORIE DU CHAMP UNIFIÉ D'EINSTEIN-SCHRÖDINGER.

I. — PRINCIPE DE LA MÉTHODE.

Pour étendre à la théorie du champ unifié d'EINSTEIN-SCHRÖDINGER la méthode exposée au chapitre I, section I, il faut supposer que dans la présente théorie les sources sont encore représentées par des singularités du champ. Disons tout de suite que cette hypothèse sur les sources ne s'harmonise pas avec l'esprit de la théorie. Celui-ci postule en effet la disparition du dualisme champ-particule. L'hypothèse précédente doit être acceptée seulement comme provisoire, en attendant que soit trouvée une solution partout régulière des équations du champ.

36. — Les termes linéaires dans la connexion affine.

Une étude rigoureuse des équations

$$W_{\alpha\beta} - \frac{2}{3} (\partial_\alpha \Gamma_\beta - \partial_\beta \Gamma_\alpha) = 0$$

est difficile. L'expression explicite de la connexion affine en fonction du tenseur fondamental est très compliquée ; pratiquement elle ne se prête qu'aux calculs approchés.

Prenons $q^{\alpha\beta}$ pour infiniment petit principal et négligeons les termes du troisième ordre en $q^{\alpha\beta}$; nous noterons les termes négligés par $0(\varepsilon^3)$. Il vient alors, en se reportant à la solution de la connexion L en fonction de $h^{\alpha\beta}$, $f^{\alpha\beta}$ [42] et en tenant compte des équations définissant $a_{\alpha\beta}$, $q^{\alpha\beta}$: ⁽¹⁵⁾

$$L_{\alpha\beta}^e = \left\{ \begin{matrix} e \\ \alpha \quad \beta \end{matrix} \right\} + w_{\alpha\beta}^e + \underbrace{L_{\alpha\beta}^e},$$

(15) Ces calculs seront exposés avec plus de détails au chapitre V, paragraphe 51.

$$(36.1) \quad w_{\alpha\beta}^e = \frac{1}{4} (\gamma_{\alpha}^e \nabla_{\beta} \text{Log } |g| + \delta_{\beta}^e \nabla_{\alpha} \text{Log } |g| - a_{\alpha\beta} a^{e\sigma} \nabla_{\sigma} \text{Log } |g|) + \\ + \frac{1}{2} (q_{\alpha}^{\sigma} \nabla_{\sigma} q_{\beta}^e + q_{\beta}^{\sigma} \nabla_{\sigma} q_{\alpha}^e) - \frac{1}{2} q^{\sigma e} (\nabla_{\beta} q_{\sigma\alpha} + \nabla_{\alpha} q_{\sigma\beta}) + 0(\varepsilon^3),$$

$$(36.2) \quad \underset{4}{L}_{\alpha\beta}^e = a^{e\sigma} (\nabla_{\sigma} q_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} q_{\alpha\beta\sigma}) + 0(\varepsilon^3),$$

où nous avons posé :

$$(36.3) \quad q_{\alpha\beta\gamma} = \partial_{\alpha} q_{\beta\gamma} + \partial_{\beta} q_{\gamma\alpha} + \partial_{\gamma} q_{\alpha\beta},$$

$$(36.4) \quad q_{\alpha\beta} = a_{\alpha\gamma} a_{\beta e} q^{\lambda e}, \quad q_{\beta}^{\alpha} = a_{\beta\lambda} q^{\alpha\lambda} = -q_{\beta}^{\alpha}.$$

(Les indices des tenseurs élevés ou abaissés par le tenseur $a_{\alpha\beta}$ sont soulignés pour éviter les confusions avec les tenseurs associés).

La première ligne au deuxième membre de (36.1) représente la différence entre les symboles de Christoffel formés avec $h_{\alpha\beta}$ et $a_{\alpha\beta}$.

Les expressions approchées (36.1) et (36.2) nous renseignent complètement sur les termes linéaires dans la connexion affine. $\underset{4}{L}_{\alpha\beta}^e$ étant d'ordre ε et $w_{\alpha\beta}^e$ d'ordre ε^2 , on voit en particulier qu'il y a des termes linéaires dans $\underset{4}{L}_{\alpha\beta}^e$ mais que $w_{\alpha\beta}^e$ n'en contient pas.

Si l'on fait les développements usuels dans le cas quasi-statique (Cf. paragraphe 41) on tire de (36.2) :

$$\underset{4}{L}_{j0}^0 = \partial_0 q_{j0} - q_{jm} \left\{ \begin{matrix} m \\ 0 \ 0 \end{matrix} \right\}_2.$$

Cette valeur est différente de celles données par L. INFELD ($\underset{4}{L}_{j0}^0 = \partial_0 \varphi_{j0}$) et par J. CALLAWAY ($\underset{4}{L}_{j0}^0 = 0$).

37. — Etude de l'intégrale μ_{α}

Pour simplifier l'exposé, nous supposons que les singularités du champ sont ponctuelles. Il est clair que la méthode se généralise au cas où les domaines singuliers ont des dimensions finies, non négligeables devant leurs distances mutuelles. Elle peut aussi être étendue au cas d'une variété V_n à n dimensions.

La variété espace-temps V_4 est supposée rapportée à un système de coordonnées dans lequel x^0 joue le rôle de variable temporelle ($a_{00} > 0$) et les x^i celui de variables spatiales ($a^{00} > 0$). Soit W_3 une section déterminée $x^0 = \text{const.}$ de V_4 . Nous supposons défini sur W_3 un champ de tenseurs contravariants d'ordre 2, g^{*ij} tel que :

$$(37.1) \quad g^{*ij} = g^{ij}.$$

On peut vérifier immédiatement que le tenseur associé de g^{*ij} a pour composantes :

$$(37.2) \quad g_{ij}^* = g_{ij} - \frac{g_{i0} g_{0j}}{g_{00}}.$$

Car :

$$g^{*ik} g_{ih}^* = g^{ik} g_{ih} - \frac{g_{0h}}{g_{00}} g_{i0} g^{ik} = g^{\lambda k} g_{\lambda h} - g^{0k} g_{0h} - \frac{g_{0h}}{g_{00}} (g_{\lambda 0} g^{\lambda k} - g_{00} g^{0k})$$

et

$$g^{*kj} g_{hj}^* = g^{kj} g_{hj} - \frac{g_{h0}}{g_{00}} g_{0j} g^{kj} = g^{k\lambda} g_{h\lambda} - g^{k0} g_{h0} - \frac{g_{h0}}{g_{00}} (g_{0\lambda} g^{k\lambda} - g_{00} g^{k0})$$

soit, compte tenu de $g_{\lambda\alpha} g^{\lambda\beta} = \delta_\alpha^\beta$, $g_{\alpha\lambda} g^{\beta\lambda} = \delta_\alpha^\beta$:

$$g^{*ik} g_{ih}^* = g^{*ki} g_{hi}^* = \delta_h^k.$$

Le changement de coordonnées locales :

$$(37.3) \quad x^i = f^i(x^{j'}) \quad x^0 = x^{0'}$$

conserve W_3 .

Considérons le tenseur M_e^λ défini par (31.12), (31.13). Dans le changement de coordonnées (37.3), les quantités $M_{(e)}^i$ où l'indice e est fixé se transforment selon la loi tensorielle :

$$M_{(e)}^i = A_{\lambda'}^i M_{(e)}^{\lambda'} = A_{j'}^i M_{(e)}^{j'},$$

qui est la loi de transformation d'un vecteur de W_3 . A ce vecteur on peut attacher la forme différentielle extérieure d'ordre 2 :

$$(37.4) \quad \Omega_{(e)} = \frac{1}{2!} \eta_{ijk}^* M_{(e)}^k dx^i \wedge dx^j,$$

où η_{ijk}^* désigne le tenseur complètement antisymétrique attaché à la forme élément de volume de W_3 .

Considérons des champs d'intégration à trois dimensions C^3 de la variété W_3 . Soient ∂C^3 leurs frontières. Posons :

$$(37.5) \quad \mu_{(e)} = \int_{\partial C^3} \Omega_{(e)}$$

Si la forme $\Omega_{(e)}$ est régulière dans C^3 , il est évident d'après le théorème de STOKES que :

$$(37.6) \quad d \Omega_{(e)} = 0$$

est la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale (37.5) soit nulle.

Prenons au contraire un champ d'intégration contenant dans son intérieur une singularité et une seule, la k -ème par exemple. Désignons le champ d'intégration par $\overset{k}{C^3}$, sa frontière par $\partial \overset{k}{C^3}$ et l'intégrale correspondante par :

$$(37.7) \quad \mu_{(e)}^k = \int_{\partial \overset{k}{C^3}} \Omega_{(e)}.$$

L'application du théorème de STOKES au domaine compris entre deux frontières $\partial \overset{k}{C'^3}$ et $\partial \overset{k}{C''^3}$ dont l'une est intérieure à l'autre (domaine dans lequel la forme est régulière), montre alors que (37.6) est la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale $\mu_{(e)}^k$ ait une valeur indépendante du choix de $\overset{k}{C^3}$.

38. — Propriétés fondamentales de l'intégrale μ_α^k .

Faisons maintenant les deux hypothèses suivantes :

a) les champs symétriques $a_{\alpha\beta}$ et antisymétriques $q^{\alpha\beta}$ admettent des développements limités en fonction d'un paramètre λ ($\lambda = 1/c$) :

$$a_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \sum_{p=1}^q \lambda^p a_{\alpha\beta}^p + O(\lambda^{q+1}),$$

$$q^{\alpha\beta} = \sum_{p=1}^q \lambda^p q^{\alpha\beta p} + O(\lambda^{q+1});$$

(En fait dans les développements que nous utiliserons, tous les coefficients de λ^p ne sont pas différents de 0; voir plus loin paragraphe 41).

b) la dérivée ∂_0 est telle qu'on puisse poser :

$$\partial_0 = \lambda \partial_1,$$

où ∂_1 est du même ordre de grandeur que les ∂_i .

En substituant à $a_{\alpha\beta}$ et $q^{\alpha\beta}$ leurs développements limités, on obtient :

$$R_{\alpha\beta} = \sum_{p=1}^q \lambda^p R_{\alpha\beta}^{(p)} + O(\lambda^{q+1}),$$

$$\mu_{(p)}^k = \sum_{p=1}^q \lambda^p \mu_{(p)}^k + O(\lambda^{q+1}),$$

$$d \Omega_{(p)} = \sum_{p=1}^q \lambda^p (d \Omega_{(p)})_p + O(\lambda^{q+1}).$$

Nous nous proposons d'établir le théorème suivant :

THÉORÈME 2.

1° Pour que la condition $d \Omega_{(p)} = 0$ d'ordre m soit vérifiée, il suffit que les équations du champ $R_{\alpha\beta} = 0$ soient satisfaites jusqu'à l'ordre $(m-1)$ inclus ;

2° La valeur de $\mu_{(p)}^k$ ne dépend effectivement que des $a_{\alpha\beta}^{(p)}$ et $q^{\alpha\beta}^{(p)}$ pour $p \leq m-1$. Elle est indépendante de $a_{\alpha\beta}^{(m)}$ et $q^{\alpha\beta}^{(m)}$.

1°/ Evaluons la différentielle extérieure de la forme $\Omega_{(p)}$. D'après (37.4) on a :

$$d \Omega_{(p)} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \partial_i (\sqrt{|g^*|} M_{(p)}^l) dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \quad (g^* = \det(g_{ij}^*))$$

soit

$$d \Omega_{(p)} = \partial_k (\sqrt{|g^*|} M_{(p)}^k) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

La condition $d \Omega_{(p)} = 0$ se traduit par :

$$(38.1) \quad \partial_k (\sqrt{|g^*|} M_{(p)}^k) = 0,$$

et l'on a :

$$(d \Omega_{(p)})_m = (\partial_k (\sqrt{|g^*|} M_{(p)}^k))_m.$$

On peut écrire les identités de conservation sous la forme suivante :

$$(38.2) \quad \partial_k (\sqrt{|g|} M_e^k) + \partial_0 (\sqrt{|g|} M_e^0) + \frac{1}{2} R_{\alpha\beta} \partial_e (\sqrt{|g|} g^{\alpha\beta}) = 0.$$

Multiplions les deux membres de (38.2) par $\sqrt{g^*/g}$ puis transformons de manière à faire apparaître la quantité au premier membre de (38.1). Les identités (38.2) peuvent alors s'écrire :

$$(38.3) \quad \partial_k (\sqrt{|g^*|} M_{(e)}^k) = - [\partial_0 (\sqrt{|g|} M_{(e)}^0) + M_{(e)}^k \partial_k \sqrt{\frac{g}{g^*}} + \frac{1}{2} R_{\alpha\beta} \partial_e (\sqrt{|g|} g^{\alpha\beta})] \sqrt{\frac{g^*}{g}}.$$

On voit que la condition (38.1) ne peut pas être satisfaite identiquement.

Désignons par A_e le deuxième membre de (38.3). Il est commode de l'écrire sous la forme :

$$A_e = - [\partial_0 (M_e^0 (1 + 0(\lambda)) + \sum_{\alpha\beta} \frac{1}{2} R_{\alpha\beta} 0_e(\lambda) + M_e^k 0_k(\lambda)) (1 + 0(\lambda)),$$

c'est-à-dire, en mettant à part le terme $\leftarrow \partial_0 M_e^0$ qui ne contient pas $0(\lambda)$ en facteur :

$$A_e = - \partial_0 M_e^0 + 0(\lambda) [\partial_0 M_e^0 + \sum_{\alpha,\beta} R_{\alpha\beta} + \sum_{\alpha} M_e^{\alpha}].$$

D'après l'expression de A_e , et en tenant compte de l'hypothèse b) d'une part, de la définition de M_e^{λ} d'autre part, on voit que $(A_e)_m$ ne fait intervenir que $R_{\alpha\beta}(p \leq m-1)$. On en déduit que les équations

$$R_{\alpha\beta} = 0 \quad (p \leq m-1)$$

entraînent $(A_e)_m = 0$. On a donc aussi :

$$[\partial_k (\sqrt{|g^*|} M_{(e)}^k)]_m = 0.$$

2°/ Nous devons étudier les termes de $M_{(e)}^i$ linéaires par rapport aux champs. Plus exactement nous aurons à considérer ceux qui ne comportent aucune dérivation par rapport à la variable x^0 . Nous les appellerons termes linéaires d'indice zéro.

On peut écrire :

$$\begin{aligned} M_e^{\lambda} &= (R_{\underline{e}\sigma} h^{\lambda\sigma} - \frac{1}{2} \delta_e^{\lambda} R_{\underline{e}\beta} h^{\alpha\beta}) + (R_{\underline{e}\sigma} f^{\lambda\sigma} - \frac{1}{2} \delta_e^{\lambda} R_{\underline{e}\beta} f^{\alpha\beta}) \\ &= h^{\lambda\sigma} (R_{\underline{e}\sigma} - \frac{1}{2} a_{e\sigma} R_{\underline{e}\beta} a^{\alpha\beta}) + (R_{\underline{e}\sigma} f^{\lambda\sigma} - \frac{1}{2} \delta_e^{\lambda} R_{\underline{e}\beta} f^{\alpha\beta}), \end{aligned}$$

ce qui montre que les termes linéaires de M_{ϱ}^{λ} proviennent de

$$(38.4) \quad \delta^{\lambda\sigma} (R_{\underline{\varrho}\sigma} - \frac{1}{2} \delta_{\varrho\sigma} R_{\underline{\alpha}\beta} \delta^{\alpha\beta}).$$

Nous poserons

$$R_{\underline{\alpha}\beta}^* = R_{\underline{\alpha}\beta} - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} \delta^{\lambda\mu} R_{\lambda\mu},$$

$$R_{\underline{\alpha}\beta} = G_{\alpha\beta} + Z_{\alpha\beta}.$$

D'après (38.4) les termes linéaires de $M_{(\varrho)}^i$ sont contenus dans la quantité $-R_{\underline{\varrho}i}^*$ qui est égal à

$$-R_{\underline{\varrho}i}^* = -G_{\varrho i}^* - Z_{\varrho i}^*,$$

$G_{\alpha\beta}^*$ et $Z_{\alpha\beta}^*$ ayant la même signification que la notation $R_{\alpha\beta}^*$.

En considérant l'expression de $Z_{\alpha\beta}$:

$$Z_{\alpha\beta} = \nabla_{\varrho} w_{\alpha\beta}^{\varrho} - \frac{1}{2} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} \text{Log } |g| + w_{\sigma\varrho}^{\varrho} w_{\alpha\beta}^{\sigma} - (w_{\sigma\beta}^{\varrho} w_{\alpha\varrho}^{\sigma} + \underbrace{L_{\sigma\beta}^{\varrho}}_{\varrho} \underbrace{L_{\alpha\varrho}^{\sigma}}_{\sigma})$$

et les expressions de la connexion affine (36.1) (36.2), on constate que $Z_{\alpha\beta}$ (donc $Z_{\alpha i}^*$) ne contient pas de termes linéaires par rapport aux champs.

D'autre part, les termes linéaires d'indice zéro de $G_{\alpha i}^*$, qui sont les mêmes que ceux de $S_{\alpha i}$, ont été étudiés au chapitre II (paragraphe 13), où il a été montré que leur contribution dans l'intégrale est nulle.

Comme $a_{\alpha\beta}^{\varrho}$ et $q^{\alpha\beta}$ ne peuvent intervenir dans l'intégrale μ_{ϱ}^k que par l'intermédiaire des termes linéaires d'indice zéro de $M_{(\varrho)}^i$, la 2ème partie du théorème est établie.

Ce théorème a une conséquence immédiate: on peut étendre la définition de μ_{ϱ}^k à la valeur $m = q + 1$, où q est l'ordre des développements limités des champs $a_{\alpha\beta}^{\varrho}, q^{\alpha\beta}$.

Dans la suite, lorsque nous calculons μ_{ϱ}^k , les équations $R_{\alpha\beta} = 0$ ($p \leq m - 1$) sont supposées satisfaites. L'expression de μ_{ϱ}^k se réduit alors à:

$$(38.5) \quad \mu_{\varrho}^k = \int_{\partial A} - R_{\varrho i}^* n^i d\Sigma$$

∂A désigne l'image de ∂C^3 dans l'espace euclidien de représentation $\mathcal{E}_3$, et $d\Sigma$ est l'élément d'aire de ∂A .

La formule (38.5) devient en vertu du théorème précédent :

$$(38.6) \quad \mu_{\varrho}^k = \int_{\partial A} - A_{\varrho i} n^i d\Sigma + \int_{\partial A} - Z_{\varrho i}^* n^i d\Sigma.$$

L'intégrale

$$\sigma_{\varrho}^k = \int_{\partial A} A_{\varrho i} n^i d\Sigma$$

a été définie au chapitre II. Mais il faut remarquer que la valeur de l'intégrale σ_{ϱ}^k en théorie unitaire est différente de sa valeur en relativité générale (sauf en première approximation) car la solution des équations du champ n'est pas la même dans les deux théories.

39. — Définition des équations de mouvement.

Du théorème précédent, on déduit par un raisonnement identique à celui qui a été fait au chapitre I, paragraphe 14 que les $4N$ conditions suivantes :

$$(39.1) \quad \mu_{\varrho}^k = \sum_{m=1}^{q+1} \lambda^m \mu_{\varrho}^k + 0 (\lambda^{q+2}) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, N)$$

nécessairement satisfaites pour tout système $(a_{\alpha\beta}, q^{\alpha\beta})$ solution des équations du champ $R_{\alpha\beta} = 0$, permettent de déterminer les trajectoires d'univers du système de N particules.

Nous poserons comme définition des équations de mouvement en théorie unitaire :

$$(39.2) \quad \mu_i^k = 0.$$

40. — Rôle joué par la partie antisymétrique du tenseur de Ricci dans le problème du mouvement.

Si nous considérons plus attentivement l'expression de μ_{ϱ}^k nous constatons que le champ antisymétrique $q^{\alpha\beta}$ intervient par l'intermédiaire de $Z_{\alpha\beta}$, mais que la partie antisymétrique $\underline{R}_{\alpha\beta}$ du tenseur de Ricci n'intervient pas directement. Il en résulte que le résultat ne serait pas changé si nous avions utilisé un tenseur autre que M_{ϱ}^{λ} . En particulier nous pourrions

introduire

$$R_{\underline{\alpha\beta}} - \frac{1}{2} a_{\alpha\beta} a^{\lambda\mu} R_{\underline{\lambda\mu}},$$

c'est-à-dire le tenseur d'EINSTEIN.

On peut se demander si l'on peut mettre en évidence une contribution de $R_{\underline{\alpha\beta}}$, en considérant séparément cette partie antisymétrique et les équations

$$(40.1) \quad R_{\underline{\alpha\beta}} = W_{\underline{\alpha\beta}} - \frac{2}{3} (\partial_{\alpha} \Gamma_{\beta} - \partial_{\beta} \Gamma_{\alpha}) = 0,$$

qu'elle vérifie. Nous allons montrer qu'il n'en est rien.

Introduisons les formes différentielles quadratiques extérieures locales :

$$R = \frac{1}{2} R_{\underline{\alpha\beta}} dx^{\alpha} \wedge dx^{\beta},$$

$$W = \frac{1}{2} W_{\underline{\alpha\beta}} dx^{\alpha} \wedge dx^{\beta},$$

$$\Gamma = \frac{1}{2} (\partial_{\alpha} \Gamma_{\beta} - \partial_{\beta} \Gamma_{\alpha}) dx^{\alpha} \wedge dx^{\beta} = d(\Gamma_{\alpha} dx^{\alpha}).$$

Considérons maintenant des champs d'intégration quelconques à trois dimensions de la variété V_4 . Soient ∂C^3 leurs frontières. Etudions l'intégrale :

$$(40.2) \quad \varrho = \int_{\partial C^3} R.$$

D'après la relation entre les tenseur de Ricci $R_{\alpha\beta}$ et $W_{\alpha\beta}$, on a :

$$\varrho = \int_{\partial C^3} W - \frac{2}{3} \int_{\partial C^3} \Gamma = \int_{\partial C^3} W,$$

l'intégrale portant sur la forme Γ est nulle parce que Γ est la différentielle extérieure d'une autre forme et que ∂C^3 est un champ d'intégration à bord nul.

La différentielle extérieure de la forme W s'écrit :

$$\begin{aligned} dW &= \frac{1}{2} \partial_{\gamma} (W_{\underline{\alpha\beta}}) dx^{\gamma} \wedge dx^{\alpha} \wedge dx^{\beta} \\ &= \frac{1}{6} (\partial_{\gamma} W_{\underline{\alpha\beta}} + \partial_{\alpha} W_{\underline{\beta\gamma}} + \partial_{\beta} W_{\underline{\gamma\alpha}}) dx^{\alpha} \wedge dx^{\beta} \wedge dx^{\gamma}, \end{aligned}$$

et la condition $dR = dW = 0$ se traduit par :

$$(40.3) \quad \partial_\alpha W_{\beta\gamma} + \partial_\beta W_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma W_{\alpha\beta} = 0.$$

Supposons cette condition satisfaite. Alors, si C^3 ne contient pas de singularité l'intégrale (40.2) est nulle ; si C^3 contient une singularité déterminée cette intégrale, qui est indépendante de ∂C^3 , ne peut dépendre que des coordonnées de la singularité. Cependant il n'existe pas de théorème analogue au théorème 1 (chapitre II, paragraphe 13) ou 2 (paragraphe 39) qui s'applique à cette intégrale.

Tout d'abord, on voit que la condition (40.3) pour être satisfaite à l'ordre m , exige que les équations du champ (40.1) soient satisfaites également à l'ordre m .

Ensuite, si l'on calcule les termes linéaires de $W_{\alpha\beta}$, on trouve d'après les formules (36.1) (36.2) l'expression suivante

$$\frac{1}{2} \delta^{\sigma\sigma} \partial_{\sigma\sigma} q_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \delta^{\sigma\sigma} (\partial_{\sigma\beta} q_{\alpha\sigma} - \partial_{\sigma\alpha} q_{\beta\sigma})$$

Le deuxième terme qui a la forme d'un rotationnel ne contribue pas à l'intégrale. Mais il n'y a aucune raison pour que le premier terme donne une contribution nulle.

Nous obtenons donc le résultat suivant :

1°) Pour que la condition $dW = 0$ d'ordre m soit vérifiée, il ne suffit pas que les équations $R_{\alpha\beta} = 0$ ($p \leq m-1$) soient vérifiées, il faut encore qu'elles soient vérifiées pour $p = m$.

2°) La valeur de q dépend effectivement de $q^{\alpha\beta}$ ($p \leq m-1$) et aussi de $q^{\alpha\beta}$.

REMARQUE. Si l'intégrale q possède les propriétés des intégrales σ_α et μ_α , on peut obtenir, à partir de l'équation (40.1), 4 relations pour chaque singularité de la façon suivante :

Donnons à l'indice α une valeur quelconque mais fixée, et soit $W_3^{(\alpha)}$ une section déterminée $x^\alpha = \text{const.}$ de V_4 (α fixé). Désignons par A, B, C des indices qui peuvent prendre les 3 valeurs de la suite (0, 1, 2, 3) distinctes de α .

Considérons un 3-champ $C_{(\alpha)}^3$ de la variété $W_3^{(\alpha)}$, contenant seulement la k -ème singularité. L'intégrale (40.2) prise sur la frontière de ce 3-champ a pour valeur :

$$q_\alpha = \int_{\partial C_{(\alpha)}^3} \frac{1}{2} W_{AB} d x^A \wedge d x^B.$$

On peut interpréter cette intégrale en disant qu'elle représente la flux du vecteur adjoint de $W_{\underset{\sim}{AB}}$ à travers l'hypersurface frontière $\partial \overset{k}{C}_{(\alpha)}^3$:

$$\overset{k}{Q}_\alpha = \int_{\partial \overset{k}{C}_{(\alpha)}^3} B^A v_A dS,$$

$$B^C = \frac{1}{2} \eta^{*ABC} W_{\underset{\sim}{AB}}.$$

Les équations du champ (40.1) entraînent les relations :

$$(40.4) \quad \overset{k}{Q}_\alpha = 0.$$

Elles expriment que le flux du vecteur (B^A) est nul pour toute solution de (40.1). Mais ici, les relations (40.4) ne sont que de simples conséquences de (40.1); elles n'imposent aucune condition supplémentaire aux champs solution de (40.1), par conséquent elles ne peuvent pas contribuer aux équations de mouvement.

II. — PREMIÈRE APPROXIMATION DES ÉQUATIONS DU CHAMP ET ÉQUATIONS DE MOUVEMENT.

41. — Les équations du champ.

Sur les développements limités du tenseur métrique $\alpha_{\alpha\beta}$ et sur le comportement à l'infini de ce tenseur, nous faisons les mêmes hypothèses qu'en relativité générale. Nous admettons qu'il existe un système de coordonnées isothermes (33.1) dans lequel on a :

$$a_{00} = 1 + \frac{1}{c^2} a_{00}^{(2)} + \dots + \frac{1}{c^{2p}} a_{00}^{(2p)} + O(1/c^{2p+2}),$$

$$a_{0i} = \frac{1}{c^3} a_{0i}^{(3)} + \dots + \frac{1}{c^{2p+1}} a_{0i}^{(2p+1)} + O(1/c^{2p+3}),$$

$$a_{ij} = -\delta_j^i + \frac{1}{c^2} a_{ij}^{(2)} + \dots + \frac{1}{c^{2p}} a_{ij}^{(2p)} + O(1/c^{2p+2}),$$

avec la condition :

$$(41.2) \quad a_{ij} = \delta_j^i a_{00}.$$

Par analogie avec (41.1), nous faisons les développements suivants de $q^{\alpha\beta}$:

$$(41.3) \quad \begin{aligned} q^{ij} &= \frac{1}{c^2} q_{22}^{ij} + \dots + \frac{1}{c^{2p}} q_{2p}^{ij} + O(1/c^{2p+2}), \\ q^{j0} &= \frac{1}{c^3} q_{33}^{j0} + \dots + \frac{1}{c^{2p+1}} q_{2p+1}^{j0} + O(1/c^{2p+3}). \end{aligned}$$

Notons que ce développement n'est pas obligatoire. Nous en discuterons les différentes modalités au paragraphe 46.

Nous supposons également que les particules se meuvent lentement par rapport à la lumière, de sorte que l'on a $\partial_0 = \frac{1}{c} \partial_1$, où ∂_1 est du même ordre de grandeur que ∂_i ($\partial_1 = \frac{\partial}{\partial t}$).

Nous allons calculer en coordonnées isothermes une solution approchée des équations du champ :

$$(41.4) \quad \partial_e (\sqrt{-g} g^{e\beta}) = 0,$$

$$(41.5) \quad W_{\alpha\beta} = 0,$$

$$(41.6) \quad W_{\alpha\beta} - \frac{2}{3} (\partial_\alpha \Gamma_\beta - \partial_\beta \Gamma_\alpha) = 0.$$

Nous avons déjà vu que la solution de (41.4) est donnée par :

$$(41.7) \quad q^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \varepsilon^{\lambda\mu\alpha\beta} \partial_\lambda \psi_\mu.$$

Aussi nous pouvons prendre pour inconnues le tenseur $a_{\alpha\beta}$ et le potentiel ψ_λ , ces grandeurs étant astreintes à vérifier les équations (41.5) (41.6).

Désormais, nous nous occuperons donc uniquement du système (41.5) (41.6), dans lequel ψ_α figure par l'intermédiaire de $q^{\alpha\beta}$ selon la formule (41.7). Pour pouvoir utiliser des résultats du chapitre II, substituons à (41.5) les équations tensorielles suivantes qui leur sont équivalentes :

$$(41.8) \quad W_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} a_{\alpha\beta} W_{\lambda\sigma} a^{\lambda\sigma} = 0;$$

D'autre part, comme il ne s'agit ici que de problèmes locaux, nous pouvons remplacer (41.6) par le système :

$$(41.9) \quad \partial_{[\alpha} W_{\beta\gamma]} \equiv \partial_{\alpha} W_{\beta\gamma} + \partial_{\beta} W_{\gamma\alpha} + \partial_{\gamma} W_{\alpha\beta} = 0.$$

En portant dans (41.8) (41.9) les développements limités (41.1) (41.3), nous obtenons à chaque étape d'approximation des équations approchées, qui sont des équations de POISSON : au premier membre figure le laplacien ordinaire de l'une des fonctions $n_{\alpha\beta} \left(= a_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} \delta^{\lambda\sigma} a_{\lambda\sigma} \right)$ ou $q_{\alpha\beta}^{\sigma}$; au second membre, des quantités que l'on peut regarder comme connues en vertu des approximations antérieures. En particulier, ces équations se réduisent à des équations de LAPLACE en première approximation.

42. — Expression approchée du tenseur de Ricci $W_{\alpha\beta}$.

Pour former les équations approchées (41.8) (41.9), il faut connaître l'expression explicite du tenseur de RICCI en fonction de $a_{\alpha\beta}$ et $q^{\alpha\beta}$, au moins aux premières approximations qui nous intéressent.

1) De (35.4) et des valeurs (36.1) (36.2) de la connexion, on déduit :

$$(42.1) \quad \begin{aligned} Z_{\alpha\beta} &= V_{\sigma} w_{\alpha\beta}^{\sigma} - \frac{1}{2} V_{\alpha} V_{\beta} \text{Log} |g| - L_{\alpha\beta}^{\sigma} L_{\sigma\alpha\beta}^{\sigma} + 0(1/c^8) = \\ &= \frac{1}{2} V^{\sigma} [q_{\alpha}^{\sigma} V_{\sigma} q_{\beta\sigma} + q_{\beta}^{\sigma} V_{\sigma} q_{\alpha\sigma} - q_{\sigma}^{\sigma} (V_{\beta} q_{\sigma\alpha} + V_{\alpha} q_{\sigma\beta})] - \\ &- \frac{1}{8} a_{\alpha\beta} V^{\sigma} V_{\sigma} (q_{\lambda\mu} q^{\lambda\mu}) - \left(V^{\lambda} q_{\alpha\sigma} - \frac{1}{2} q_{\alpha\sigma}^{\lambda} \right) \left(V^{\sigma} q_{\lambda\beta} - \frac{1}{2} q_{\lambda\beta}^{\sigma} \right) + 0(1/c^8). \end{aligned}$$

En explicitant et en tenant compte de l'équation (41.4) on obtient :

$$(42.2) \quad \begin{aligned} Z_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{2} q^{\sigma\sigma} (\partial_{\sigma\beta} q_{\sigma\alpha} + \partial_{\sigma\alpha} q_{\sigma\beta}) - \frac{1}{8} a_{\alpha\beta} a^{\sigma\sigma} \partial_{\sigma\sigma} (q_{\lambda\mu} q^{\lambda\mu}) + \\ &+ q^{\sigma\sigma} \left[\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \alpha \end{matrix} \right\} \partial_{\beta} q_{\sigma\lambda} + \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \beta \end{matrix} \right\} \partial_{\alpha} q_{\sigma\lambda} + \partial_{\sigma} \left(\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \alpha \end{matrix} \right\} q_{\sigma\lambda} \right) \right] - \\ &- \frac{1}{2} q^{\sigma\sigma} \left(\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \alpha \end{matrix} \right\} q_{\beta\sigma\lambda} + \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \beta \end{matrix} \right\} q_{\alpha\sigma\lambda} \right) - \\ &- \frac{1}{4} (q_{\alpha\sigma\lambda} V_{\beta} q^{\sigma\lambda} + q_{\beta\sigma\lambda} V_{\alpha} q^{\sigma\lambda}) + \frac{1}{4} q_{\alpha\sigma\lambda} q_{\beta}^{\sigma\lambda} + \\ &+ G_{\sigma\tau} q_{\alpha}^{\sigma} q_{\beta}^{\tau} + \frac{1}{8} a_{\alpha\beta} F^{\sigma} \partial_{\sigma} (q_{\lambda\mu} q^{\lambda\mu}) + 0(1/c^8), \end{aligned}$$

où

$$F^\lambda \equiv -g^{\alpha\beta} L_{\alpha\beta}^\lambda = -\mathcal{J} a^{\alpha\beta} \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \alpha \beta \end{matrix} \right\} \quad \left(\mathcal{J} = \sqrt{\frac{g}{h}} \right).$$

En nous limitant à l'approximation précédemment définie, on n'a pas à tenir compte du terme $G_{\sigma\tau} q_{\alpha}^{\sigma} q_{\beta}^{\tau}$. Les 2ème et 3ème lignes de (42.2) sont utiles pour le calcul de Z_{ij}^* , mais elles n'interviennent pas dans la formation des équations (41.8) en première et seconde approximation. On déduit ainsi de (42.2):

$$(42.3) \quad \begin{aligned} Z_{\alpha\beta}^{*(\mathcal{J})} = & -\frac{1}{2} q^{\sigma\varrho} \partial_{\alpha\beta} q_{\sigma\varrho} + \frac{1}{8} a_{\alpha\beta} a^{\varrho\sigma} \partial_{\varrho\sigma} (q_{\lambda\mu} q^{\lambda\mu}) + \\ & + \frac{1}{4} q^{\sigma\varrho} (\partial_{\beta} q_{\sigma\varrho\alpha} + \partial_{\alpha} q_{\sigma\varrho\beta}) - \frac{1}{4} (q_{\alpha\varrho\lambda} \partial_{\beta} q^{\varrho\lambda} + q_{\beta\varrho\lambda} \partial_{\alpha} q^{\varrho\lambda}) + \\ & + \frac{1}{4} q_{\alpha\varrho\lambda} q_{\beta}^{\varrho\lambda} - \frac{1}{24} a_{\alpha\beta} q_{\sigma\varrho\lambda} q^{\sigma\varrho\lambda} + 0(1/c^6). \end{aligned}$$

Les équations approchées (41.8) se mettent donc sous la forme:

$$(42.4) \quad G_{\alpha\beta}^{*(\mathcal{J})} + Z_{\alpha\beta}^{*(\mathcal{J})} + M_{\alpha\beta}^{(\mathcal{J})} = 0.$$

Dans ces équations, $G_{\alpha\beta}^{*(\mathcal{J})}$ a été calculé au chapitre II, $Z_{\alpha\beta}^{*(\mathcal{J})}$ est donné par (42.3), tandis que $M_{\alpha\beta}$ est une quantité qui disparaîtra.

2) Calculons de même la partie antisymétrique $\widehat{W}_{\alpha\beta}$. D'après (35.5) (36.2):

$$(42.5) \quad \begin{aligned} \widehat{W}_{\alpha\beta} = & \nabla_{\varrho} L_{\alpha\beta}^{\varrho} + 0(1/c^6) \\ = & \nabla^{\varrho} \nabla_{\varrho} q_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \nabla_{\varrho} q_{\alpha\beta\varrho} + 0(1/c^6). \end{aligned}$$

Il est plus simple de considérer séparément les deux termes. Développons les dérivées covariantes, il vient:

$$(42.6) \quad \begin{aligned} \widehat{W}_{\alpha\beta} = & a^{\varrho\sigma} \partial_{\varrho\sigma} q_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} a^{\varrho\sigma} \partial_{\sigma} q_{\alpha\beta\varrho} - 2 a^{\varrho\sigma} \left(\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \alpha\varrho \end{matrix} \right\} \partial_{\sigma} q_{\lambda\beta} + \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \beta\varrho \end{matrix} \right\} \partial_{\sigma} q_{\alpha\lambda} \right) - \\ = & a^{\varrho\sigma} \left(\partial_{\sigma} \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \alpha\varrho \end{matrix} \right\} q_{\lambda\beta} + \partial_{\sigma} \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \beta\varrho \end{matrix} \right\} q_{\alpha\lambda} \right) - F^{\lambda} \nabla_{\lambda} q_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} F^{\lambda} q_{\alpha\beta\lambda} + \\ & + \frac{1}{2} a^{\varrho\sigma} \left(\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \alpha\sigma \end{matrix} \right\} q_{\lambda\beta\varrho} + \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \beta\sigma \end{matrix} \right\} q_{\alpha\lambda\varrho} \right) + 0(1/c^6). \end{aligned}$$

A partir de (42.6) on déduit immédiatement les équations approchées (41.9) par dérivation et permutation circulaire. Dans ces équations n'interviendront que la première ligne de (42.6). En effet, si nous remplaçons les symboles de Christoffel par leurs valeurs, nous trouvons que les termes :

$$- a^{\rho\sigma} \left(\partial_\sigma \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \alpha \end{matrix} \right\} q_{\underline{\rho}}^{\lambda} + \partial_\sigma \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \beta \end{matrix} \right\} q_{\underline{\rho}}^{\lambda} \right)$$

sont égaux à

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2} a^{\rho\sigma} (\partial_{\rho\sigma} a_{\alpha\lambda} q_{\underline{\rho}}^{\lambda} + \partial_{\rho\sigma} a_{\beta\lambda} q_{\underline{\rho}}^{\lambda}) - \frac{1}{2} (\partial_\alpha F^\lambda q_{\underline{\lambda}}^{\lambda} + \partial_\beta F^\lambda q_{\underline{\lambda}}^{\lambda}) + \\ & + \frac{1}{2} \partial_\lambda F^\gamma (a_{\alpha\gamma} q_{\underline{\beta}}^{\lambda} + a_{\beta\gamma} q_{\underline{\alpha}}^{\lambda}) + 0 \ (1/c^6), \end{aligned}$$

et qu'ils peuvent être négligés. D'autre part, nous verrons au paragraphe 44 que $q_{\underline{\alpha}\underline{\beta}\underline{\gamma}}$ est nul en première approximation, d'après la solution choisie pour le potentiel ψ_α (Cf. (44.1)).

43. — Le potentiel électromagnétique dans le cas quasi-statique.

Ce que nous désirons savoir, en faisant la présente étude, c'est la possibilité qu'offre la théorie d'EINSTEIN-SCHRÖDINGER pour une éventuelle déduction des équations de mouvement de LORENTZ. Nous serons donc amené à chercher une solution des équations du champ représentant un système de particules chargées; cela nous conduira naturellement à essayer d'identifier le potentiel ψ_α avec le potentiel électromagnétique ⁽¹⁶⁾.

Considérons donc, dans l'espace-temps muni de la métrique riemannienne:

$$(43.1) \quad ds^2 = a_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta,$$

le potentiel électromagnétique créé par un système de particules chargées $\overset{s}{P}$ ($s = 1, 2, \dots, N$). Ce potentiel, rapporté à un repère quelconque, a pour expression :

$$(43.2) \quad \varphi_\lambda = \sum_{s=1}^N \varphi_\lambda^s,$$

où :

$$(43.3) \quad \varphi_\lambda^s = \overset{s}{\varphi} \overset{s}{u}_\lambda = (e/r) \overset{s}{u}_\lambda,$$

⁽¹⁶⁾ C'est-à-dire identifier le tenseur $q^{\alpha\beta}$ avec l'adjoint du tenseur champ électromagnétique.

$\frac{e}{r}$ est le potentiel électromagnétique créé par la particule $\overset{s}{P}$ dans son repère propre, $\overset{s}{u}_\lambda$ est le vecteur vitesse unitaire de cette particule. Dans le repère propre, la particule étant au repos, le potentiel est purement électrique.

En portant dans (43.1) les développements limités de $a_{\alpha\beta}$, on obtient avec l'hypothèse quasi-statique :

$$(43.4) \quad d s^2 = \left(1 + \frac{1}{c^2} a_{00} \right) (d x^0)^2 - \delta_j^i d x^i d x^j + 0 (1/c^4),$$

Le vecteur vitesse unitaire $u^\lambda = d x^\lambda / d s$ peut être calculé à un ordre d'approximation quelconque. Si l'on se limite en ce qui concerne φ_λ aux termes du cinquième ordre, il suffit de considérer l'expression approchée suivante du ds^2 :

$$ds'^2 = \left(1 + \frac{1}{c^2} a_{00} \right) (d x^0)^2 - \delta_j^i d x^i d x^j.$$

Sur la trajectoire d'univers de la particule $\overset{s}{P}$, de coordonnées $(x^0 = x^0, x^i = \overset{s}{\xi}^i)$ ce ds^2 approché est égal à :

$$ds'^2 = \left(1 + \frac{1}{c^2} a_{00} \right) (d x^0)^2 - \delta_j^i d \overset{s}{\xi}^i d \overset{s}{\xi}^j$$

ce qui donne, jusqu'au quatrième ordre :

$$(43.5) \quad \begin{cases} \overset{s}{u}^0 \simeq \frac{d x^0}{d s'} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2} (v^2 - a_{00})}} & \left(\frac{1}{c^2} v^2 = \delta_j^i \frac{d \overset{s}{\xi}^i}{d x^0} \frac{d \overset{s}{\xi}^j}{d x^0} \right), \\ \overset{s}{u}^i \simeq \frac{d \overset{s}{\xi}^i}{d s'} = \frac{\frac{1}{c} \overset{s}{\xi}^i}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2} (v^2 - a_{00})}} & \left(\frac{1}{c} \overset{s}{\xi}^i = \frac{d \overset{s}{\xi}^i}{d x^0} \right). \end{cases}$$

On en déduit les valeurs approchées des composantes covariantes :

$$\overset{s}{u}_\lambda = a_{\lambda\mu} \overset{s}{u}^\mu.$$

Substituant celles-ci dans l'expression de φ_λ , et faisant les développements limités suivants pour e :

$$(43.6) \quad e = \frac{1}{c^2} e + \frac{1}{c^4} e + 0(1/c^6),$$

il vient :

$$(43.7) \quad \begin{cases} \varphi_\lambda = \sum_{s=1}^N \left(\frac{1}{c^2} \varphi_\lambda + \frac{1}{c^3} \varphi_\lambda + \frac{1}{c^4} \varphi_\lambda + \frac{1}{c^5} \varphi_\lambda \right) + 0(1/c^6), \\ \varphi_0 = e / r, \\ \varphi_i = -\dot{\xi}^i (e / r) = -\dot{\xi}^i \varphi_0 \\ \varphi_0 = e / r + \frac{1}{2} \varphi_0 (v^2 + a_{00}), \\ \varphi_i = -\dot{\xi}^i (e / r) + \frac{1}{2} \dot{\xi}^j \varphi_0 [2 a_{ij} - \delta_j^i (v^2 - a_{00})] + \varphi_0 a_{i0}. \end{cases}$$

Ce sont les deux premières valeurs de (43.7) qu'ont prises L. INFELD et J. CALLAWAY pour satisfaire en première approximation aux équations (41.4) (41.9).

44. — La première approximation des équations du champ.

A la première approximation, les champ symétrique et antisymétrique se séparent.

1) Les équations (41.5) s'écrivent exactement comme en relativité générale :

$$\Delta n_{00} = 0,$$

$$\Delta n_{0i} = 0,$$

avec la même condition de coordonnées :

$$-\partial_r n_{r0} + \partial_0 n_{00} = 0.$$

La solution de ces équations est donnée par les formules :

$$U = \sum_{s=1}^N \frac{s}{r}, \quad \frac{s}{U} = -G \frac{s}{m_0} \frac{s}{r},$$

$$\frac{n_{00}}{2} = 4 \frac{s}{U},$$

$$\frac{n_{0i}}{3} = -4 \sum_{s=1}^N \frac{s}{U} \xi^i,$$

La constante d'intégration $\frac{s}{m_0}$ ne dépend pas du temps d'après l'équation $\frac{\mu_0}{3} = 0$.

2) Les équations (41.9) s'écrivent :

$$\Delta \frac{q_{ij\bar{k}}}{2} = 0$$

$$\Delta \frac{q_{ij\bar{0}}}{3} = 0$$

où $\frac{q_{\alpha\beta\gamma}}{2}$ doit être remplacé par son expression en fonction de ψ_α

$$\frac{q_{\alpha\beta\gamma}}{2} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} (\partial_{\mu\nu} \psi_\varrho - \partial_{\mu\varrho} \psi_\nu) \delta^{\mu\nu} \delta^{\delta\varrho} + 0 (1/c^4).$$

On aura une solution de ces équations en prenant pour ψ_0 et ψ_i des fonctions harmoniques ; ceci aura lieu, en particulier, si nous identifions ψ_α avec le potentiel électromagnétique :

$$(44.1) \quad \psi_\alpha = \sum_{s=1}^N \frac{s}{r}, \quad \frac{\psi_0}{2} = \frac{s}{2} \frac{s}{r}, \quad \frac{\psi_i}{3} = -\frac{s}{2} \frac{s}{r} \xi^i.$$

Cette solution entraîne deux conséquences :

$$a) \quad \frac{q_{ij\bar{k}}}{2} = 0, \quad \frac{q_{ij\bar{0}}}{3} = 0;$$

b) $\partial_i \frac{\Gamma_j}{2} - \partial_j \frac{\Gamma_i}{2} = 0$, $\partial_j \frac{\Gamma_0}{3} - \partial_0 \frac{\Gamma_j}{1} = 0$, de sorte que le champ de vecteurs Γ_α est en première approximation un champ de gradient.

45. — Les équations du mouvement.

Elles sont définies en première approximation par les équations :

$$(45.1) \quad \mu_i^k = -\frac{1}{c^4} \left(\sigma_i^k + \int_4 Z_{ir}^* n^r d\Sigma \right) + 0(1/c^6) = 0,$$

où σ_i^k a la valeur calculée en relativité générale.

De (42.3) on déduit :

$$(45.2) \quad Z_{ij}^* = -\frac{1}{2} q_2^{sr} \partial_{ij} q_{rs} + \frac{1}{8} \delta_j^i \Delta (q_{ab} q^{ab})$$

Cette expression peut s'écrire encore :

$$(45.3) \quad Z_{ij}^* = -\frac{1}{2} \partial_r [q_2^{sr} \partial_i q_2^{sj} - q_2^{sj} \partial_i q_2^{sr} + \frac{1}{4} \delta_r^i \partial_j (q_2^{ab} q_2^{ab}) - \\ - \frac{1}{4} \delta_j^i \partial_r (q_2^{ab} q_2^{ab})]$$

le crochet étant antisymétrique par rapport aux indices j, r ⁽¹⁷⁾. D'après le lemme du chapitre II (Cf. paragraphe 12), il en résulte que l'on a identiquement :

$$(45.4) \quad \int_4 Z_{ir}^* n^r d\Sigma \equiv 0.$$

L'équation (45.1) se réduit donc à :

$$\frac{1}{c^4} \sigma_i^k + 0(1/c^6) = 0.$$

Dans cette équation n'interviennent pas les $q^{\alpha\beta}$. Aussi n'obtient-on pas l'action du champ électromagnétique sur la particule chargée. On re-

⁽¹⁷⁾ Si $q_{\alpha\beta\gamma}$ n'est pas nul en première approximation, le second membre de (45.3) contiendra en plus le terme :

$$\frac{1}{4} (q^{\sigma\varrho} \partial_j q_{\sigma\varrho i} - q_{i\varrho\lambda} \partial_j q^{\varrho\lambda} + q_{i\varrho\lambda} q_j^{\varrho\lambda} + \frac{1}{6} \delta_j^i q_{\varrho\lambda\sigma} q^{\varrho\lambda\sigma}).$$

trouve seulement un résultat fondamental de la relativité générale, qui permet d'obtenir les équations de mouvement d'une masse dans un champ de gravitation.

Ainsi, en prenant $a^{\alpha\beta}$ comme métrique et $q^{\alpha\beta}$ comme champ électromagnétique, on n'obtient que les équations de mouvement des particules matérielles (sans charges). Ce résultat est donc équivalent à celui obtenu par J. CALLAWAY [34] en prenant $\gamma_{\alpha\beta}$ et $\varphi_{\alpha\beta}$.

46. — Interprétation du résultat négatif. Discussion des possibilités laissées à cette méthode.

Les équations de mouvement des particules chargées contiennent des produits quadratiques des charges. Pour cette raison, si l'on peut obtenir ces équations ce doit être seulement en première approximation. Faut-il donc conclure, en se basant sur le résultat négatif (45.4), que la théorie d'EINSTEIN-SCHRÖDINGER ne donne pas les équations de mouvement des particules chargées ? Nous ne le pensons pas, car ce résultat négatif tient d'abord aux valeurs particulières (44.1) choisies pour ψ_α , qui font disparaître les termes en $q_{\alpha\beta\gamma}$ de Z_{ij}^* . La solution (44.1) paraît naturelle, mais elle n'est pas imposée par les équations du champ.

W. B. BONNOR [33] fait remarquer aussi que même si l'intégrale (45.4) n'est pas identiquement nulle, elle ne pourrait pas donner une loi de force en $1/r^2$. Cette loi nécessiterait la présence dans le tenseur de RICCI des termes quadratiques par rapport aux champs antisymétriques eux-mêmes, et non par rapport à leurs dérivées.

Nous pouvons dire maintenant que le problème qui se pose est le suivant : Trouver une solution ψ_α telle que :

1) les dérivées de ψ_α soient d'ordre $1/r$ dans le voisinage de chaque particule ;

2) le « courant » $q_{\alpha\beta\gamma}$ ne soit pas nul pour cette solution.

Avant d'avoir résolu ce problème, il serait peut-être prématuré d'affirmer l'impuissance de la théorie, et d'abandonner par là tout espoir d'obtenir une influence des champs antisymétriques dans les équations de mouvement en première approximation.

Nous avons essayé vainement de déterminer une solution ψ_α satisfaisant aux conditions 1) et 2). Tout d'abord nous sommes amenés à modifier les développements limités de q^{j0} et q^{ij} en les commençant respectivement par $0(1/c^2)$ et par $0(1/c^3)$:

$$q^{j0} = \frac{1}{c^2} q_2^{j0} + \dots \quad q^{ij} = \frac{1}{c^3} q_3^{ij} + \dots$$

Nous devons alors considérer les développements limités suivants de ψ_a , en accord avec ceux de $q^{\alpha\beta}$:

$$\psi_i = \frac{1}{c^2} \psi_i + \dots \quad \psi_0 = \frac{1}{c^3} \psi_0 + \dots$$

Nous pouvons ainsi satisfaire aux équations de champ $\frac{1}{2} q_{i\bar{j}\bar{k}} = 0$, $\frac{1}{3} q_{i\bar{j}\bar{k}} = 0$, en prenant la solution:

$$\psi_\gamma = \sum_{s=1}^N \psi_\gamma, \quad \frac{1}{2} \psi_i = (x^i - \xi^i) e/r, \quad \frac{1}{2} \psi_0 = -\xi^r (x^r - \xi^r) e/r.$$

Cette solution vérifie la condition 1). Malheureusement, elle entraîne encore $\frac{1}{2} q_{i\bar{j}\bar{k}} = 0$ (et $\frac{1}{3} q_{i\bar{j}\bar{k}} = 0$), et l'on retombe sur une intégrale identiquement nulle:

$$\begin{aligned} Z_{ij}^* = \frac{1}{2} \partial_r [q_{i\bar{j}}^{0r} \partial_i q_{\bar{j}}^{0j} - q_{i\bar{j}}^{0j} \partial_i q_{\bar{j}}^{0r} + \frac{1}{2} \delta_r^i \partial_i (q_{\bar{j}}^{0b} q_{\bar{j}}^{0b}) - \frac{1}{2} \delta_j^i \partial_r (q_{\bar{j}}^{0b} q_{\bar{j}}^{0b})] \\ \int_{\partial\mathcal{V}} Z_{ir}^* n^r d\Sigma = 0. \end{aligned}$$

III. — LES ÉQUATIONS DU CHAMP EN SECONDE APPROXIMATION

47. — Remarques sur la solution des équations relatives au champ symétrique.

Nous allons former les équations du champ (41.8) (41.9) en seconde approximation pour avoir une idée de leur solution, relativement complexe par rapport à la solution des équations du champ en relativité générale, et pour montrer que l'identification du potentiel ψ_a de la formule (41.7) avec le potentiel électromagnétique défini par (43.2) (43.3), c'est-à-dire l'interprétation du tenseur $q_{\alpha\beta}^*$ comme tenseur champ électromagnétique n'est plus possible au delà de la première approximation.

A l'aide des formules du paragraphe 42 et des calculs déjà faits en relativité générale, les « équations de la gravitation » s'écrivent:

$$(47.1) \quad \Delta n_{ij} = \frac{1}{4} \partial_i U \partial_j U + 2 \tilde{\delta}_j^i \partial_s U \tilde{\delta}_s U + [q_{i\bar{j}}^{sr} \partial_{\bar{j}} q_{\bar{s}} + \frac{1}{4} \partial_{rr} (q_{\bar{s}}^{ab} q_{\bar{s}}^{ab}) \delta_j^i],$$

$$(47.2) \quad \Delta n_{00} = 4 \partial_{11} U - 2 \partial_s U \partial_s U + \left[\frac{1}{4} \partial_{rr} (q_{22}^{ab} q_{22}^{ab}) \right],$$

$$(47.3) \quad \Delta n_{0i} = \partial_{00} n_{0i} + 4 \partial_i n_{0s} \partial_s U - 12 \partial_i U \partial_0 U + [q_{22}^{sr} \partial_{0i} q_{sr}],$$

avec les mêmes conditions de coordonnées qu'en relativité générale

$$\left(g^{\alpha\beta} L_{\alpha\beta}^e = \mathcal{I} a^{\alpha\beta} \left\{ \begin{matrix} e \\ \alpha \beta \end{matrix} \right\} \right):$$

$$(47.4) \quad \partial_r n_{ri} - \partial_0 n_{0i} - 4 U \partial_i U = 0,$$

$$(47.5) \quad - \partial_r n_{r0} + \partial_0 n_{00} + 2 n_{0r} \partial_r U - 4 U \partial_0 U = 0.$$

Nous intégrons les équations du champ comme nous l'avons fait en relativité générale. Nous cherchons une solution particulière des équations avec second membre, à laquelle nous devons ajouter la solution générale constituée par les fonctions harmoniques des équations homogènes. Ces fonctions harmoniques seront déterminées de manière à satisfaire les conditions de coordonnées et la condition d'intégrabilité $\mu_0^k = 0$.

Ecrivons les équations de champ sous la forme générale :

$$(47.6) \quad \Delta n_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} + B_{\alpha\beta},$$

$B_{\alpha\beta}$ désignant les termes du second membre placés entre crochets ($B_{\alpha\beta} = -2 Z_{\alpha\beta}^*$). Soit :

$$x_{\alpha\beta} + y_{\alpha\beta}.$$

une intégrale particulière de l'équation (47.6), $x_{\alpha\beta}$ et $y_{\alpha\beta}$ se rapportant respectivement aux quantités $A_{\alpha\beta}$ et $B_{\alpha\beta}$ du second membre. On a déjà calculé $x_{\alpha\beta}$ dans le cas de la relativité générale. Le calcul de $y_{\alpha\beta}$ est (comme celui de $x_{\alpha\beta}$) immédiat pour l'équation (47.1) si $i=j$ et pour l'équation (47.2); mais, pour l'équation (47.1) si $i \neq j$, et pour l'équation (47.3) nous ne pouvons chercher qu'une solution particulière dans le voisinage de chaque particule.

Le tenseur $q^{\alpha\beta}$ étant défini en fonction de φ_α par la formule (41.7), si nous adoptons pour le potentiel φ_α la solution (44.1) — considérée par divers auteurs — nous aurons :

$$q_{22}^{ij} (= q_{22}^{ij}) = \varepsilon^{p0ij} \partial_p \varphi_0,$$

d'où :

$$(47.7) \quad q_{21}^{sr} \partial_{ij} q_{2-}^{sr} = \varepsilon^{p0sr} \varepsilon_{q0sr} \partial_p q_0 \partial_{qij} q_0 = 2 \partial_m q_0 \partial_{mij} q_0,$$

$$q_{21}^{sr} \partial_{0i} q_{s-}^{sr} = 2 \partial_m q_0 \partial_{m0i} q_0.$$

Comme

$$\partial_0 q_0 = \partial_r q_r = \partial_r \sum_{s=1}^N q_s, \quad \xi^r$$

tout se ramène à chercher une intégrale particulière pour le terme (47.7). Développons ce terme dans le voisinage de la k -ème particule, en posant pour simplifier l'écriture :

$$X^r = x^r - \xi^r; \quad \tilde{\partial}_m q_0 = \sum_{l \neq k} \tilde{\partial}_m^l q_0, \quad \tilde{\partial}_{mi} q_0 = \sum_{l \neq k} \tilde{\partial}_{mi}^l q_0, \text{ etc } \dots$$

Il vient :

$$\begin{aligned} \partial_m q_0 \partial_{mij} q_0 &= \partial_m^k q_0 \partial_{mij}^k q_0 + \partial_m^k q_0 \tilde{\partial}_{mij} q_0 + \\ &+ \partial_{mij}^k q_0 (\tilde{\partial}_m q_0 + X^r \tilde{\partial}_{mr} q_0) + \frac{1}{4} X^r X^s \tilde{\partial}_{mrs} q_0 + 0(1/r^k). \end{aligned}$$

Nous avons donc à considérer les termes suivants, à un facteur près indépendant des variables (x^r) :

$$\partial_m^k q_0 \partial_{mij}^k q_0, \quad \partial_m^k q_0, \quad \partial_{mij}^k q_0, \quad X^r \partial_{mij}^k q_0, \quad X^r X^s \partial_{mij}^k q_0.$$

Le premier terme, par son ordre de grandeur, n'intervient pas dans l'intégrale μ_α . Les deuxième et troisième termes s'intègrent d'après les relations :

$$A\left(\frac{1}{2} X^m \partial_{ij}^k q_0\right) = \partial_m^k q_0, \quad A\left(\frac{1}{2} X^m \partial_{ij}^k q_0\right) = \partial_{mij}^k q_0.$$

Pour calculer une intégrale particulière correspondant au quatrième terme, partons de la relation :

$$(47.8) \quad \frac{1}{2} A(X^r X^m \partial_{ij}^k q_0) = X^r \partial_{ijm}^k q_0 + X^m \partial_{ijr}^k q_0 + \delta_m^r \partial_{ij}^k q_0.$$

Or, on peut d'après l'expression de $\varphi_0^{(k)} (= e/r)$ vérifier que l'on a :

$$\partial_{ij}^{(k)} \varphi_0 = 3 \left(\varphi_0 / r^4 \right) X^i X^j - \left(\varphi_0 / r^2 \right) \delta_j^i \quad (X^i = x^i - \xi^i)$$

$$\partial_{ijr}^{(k)} \varphi_0 = -15 \left(\varphi_0 / r^6 \right) X^i X^j X^r + 3 \left(\varphi_0 / r^4 \right) (X^r \delta_j^i + X^i \delta_r^j + X^j \delta_r^i).$$

A l'aide de ces formules on peut exprimer $X^m \partial_{ijr}^{(k)} \varphi_0$ en fonction de $X^r \partial_{ijm}^{(k)} \varphi_0$:

$$X^m \partial_{ijr}^{(k)} \varphi_0 = X^r \partial_{ijm}^{(k)} \varphi_0 + \partial_{mi}^{(k)} \varphi_0 \delta_r^j + \partial_{mj}^{(k)} \varphi_0 \delta_r^i - \partial_{ri}^{(k)} \varphi_0 \delta_m^j - \partial_{rj}^{(k)} \varphi_0 \delta_m^i.$$

En portant cette expression dans (47.8) on déduit la relation :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta [X^r X^m \partial_{ij}^{(k)} \varphi_0 - \delta_m^r X^i \partial_j^{(k)} \varphi_0 - X^m (\delta_j^r \partial_i^{(k)} \varphi_0 + \delta_i^r \partial_j^{(k)} \varphi_0) + \\ + X^r (\delta_j^m \partial_i^{(k)} \varphi_0 + \delta_i^m \partial_j^{(k)} \varphi_0)] = 2 X^r \partial_{ijm}^{(k)} \varphi_0, \end{aligned}$$

sur laquelle apparait en évidence une intégrale particulière de $X^r \partial_{ijm}^{(k)} \varphi_0$.

Le calcul est analogue pour le cinquième terme. Nous ne donnons pas le résultat qui est plus compliqué, notre intention n'étant pas de calculer l'intégrale $\mu_i^{(k)}$, mais d'examiner l'interprétation du tenseur $q^{\alpha\beta}$.

48. — Interprétation des champs antisymétriques.

On déduit de : (Cf. (42.6))

$$W_{\alpha\beta} = a^{\sigma\sigma} \partial_{\sigma\sigma} q_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} a^{\sigma\sigma} \partial_{\sigma} q_{\alpha\beta\sigma} - 2 a^{\sigma\sigma} \left(\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \alpha \sigma \end{matrix} \right\} \partial_{\sigma} q_{\lambda\beta} + \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \beta \sigma \end{matrix} \right\} \partial_{\sigma} q_{\alpha\lambda} \right) + 0(1/c^6)$$

les expressions de W_{ij} et W_{j0} :

$$(48.1) \quad W_{ij} = -\Delta q_{ij} + \partial_{00} q_{ij} + \frac{1}{2} \partial_r q_{ijr} - \frac{1}{2} \partial_r n_{00} \partial_r q_{ij},$$

$$(48.2) \quad \underline{W_{j0}} = -\Delta \underline{q_{j0}} + \partial_{00} \underline{q_{j0}} + \frac{1}{2} \partial_r n_{00} \partial_r \underline{q_{j0}} + \delta^{\lambda\mu} (\partial_j \underline{q_{r\lambda}} \partial_r \underline{n_{0\mu}}).$$

Formons la permutation circulaire $\partial_{[\alpha} \underline{W_{\beta\gamma]} \equiv \partial_\alpha \underline{W_{\beta\gamma}} + \partial_\beta \underline{W_{\gamma\alpha}} + \partial_\gamma \underline{W_{\alpha\beta}}$; en remarquant que l'on a identiquement :

$$\partial_\alpha \underline{q_{\beta\gamma\varrho}} + \partial_\beta \underline{q_{\gamma\alpha\varrho}} + \partial_\gamma \underline{q_{\alpha\beta\varrho}} = \partial_\varrho \underline{q_{\alpha\beta\gamma}},$$

on obtient les « équations approchées de l'électromagnétisme » sous la forme :

$$(48.3) \quad -2 \partial_{[k} \underline{W_{ij]} = \Delta \underline{q_{ijk}} + \partial_r \underline{q_{[ij} \partial_{k]r} n_{00}} = 0,$$

$$(48.4) \quad -2 \partial_{[i} \underline{W_{j0]} = \Delta \underline{q_{ij0}} + \partial_r \underline{q_{[j0} \partial_{i]r} n_{00}} + \\ + 2 \delta^{\lambda\mu} (\partial_i \underline{q_{r\lambda}} \partial_{jr} \underline{n_{0\mu}} - \partial_j \underline{q_{r\lambda}} \partial_{ir} \underline{n_{0\mu}}) = 0.$$

Trois indices placés entre crochets indiquent qu'il faut faire la sommation sur les termes déduits par permutation circulaire de ces indices.

La relation $\underline{q_{\alpha\beta}} = a_{\alpha\lambda} a_{\beta\mu} q^{\lambda\mu}$ a pour conséquence :

$$\underline{q_{ij}} = \underline{q^{ij}} - \underline{n_{00} q^{ij}},$$

$$\underline{q_{j0}} = -\underline{q^{j0}} - \underline{n_{0r} q^{jr}},$$

nù $q^{\alpha\beta}$ s'exprime en fonction de ψ_α au moyen des expressions suivantes :

$$\underline{q^{ij}} = \varepsilon^{p0ij} \partial_p \psi_0 \quad (\psi_0 = \varphi_0),$$

$$\underline{q^{j0}} = \varepsilon^{pqij} \partial_p \psi_q \quad (\psi_i = \varphi_i),$$

$$\underline{q^{ij}} = \varepsilon^{p0ij} (\partial_p \psi_0 - \partial_0 \psi_p) + \frac{1}{2} \underline{n_{00} q^{ij}},$$

$$\underline{q^{j0}} = \varepsilon^{pqj0} \partial_p \psi_q + \frac{1}{2} \underline{n_{00} q^{j0}}.$$

Les équations (48.3) (49.4) qui définissent ψ_0 et ψ_i s'écrivent donc :

$$(48.5) \quad \varepsilon_{ijk0} \Delta \psi_0 = 0,$$

$$(48.6) \quad \varepsilon_{0ijk} [\Delta \underset{5}{(-\Delta \psi_k + \partial_{kr} \psi_r - \partial_{k0} \psi_0)} + 2 \delta^{\lambda\mu} \partial_r (\partial_{k\lambda} \underset{2}{\psi_0} \partial_r n_{0\mu} - \\ - \partial_{r\lambda} \underset{2}{\psi_0} \partial_k n_{0\mu})_5] = 0,$$

c'est-à-dire, pour (48.6) :

$$(48.7) \quad \varepsilon_{0ijk} \Delta [(-\Delta \underset{5}{\psi_k} + \partial_{kr} \underset{5}{\psi_r} - \partial_{k0} \underset{1}{\psi_0}) + \delta^{\lambda\mu} (\partial_{k\lambda} \underset{2}{\psi_0} n_{0\mu} - \partial_{r\lambda} \underset{2}{\psi_0} \partial_k n_{0\mu})_5] = 0.$$

Or, si l'on calcule par exemple le laplacien itéré de l'expression φ_0 du potentiel électromagnétique :

$$(48.8) \quad \varphi_0 = \sum_{s=1}^N \left[\frac{e}{r} + \frac{1}{2} \varphi_0 \left(v^2 + \frac{n_{00}}{2} \right) \right],$$

on trouve :

$$\Delta \Delta \varphi_0 = \sum_{s=1}^N 2 \partial_{rm} \varphi_0 \partial_{rm} n_{00} \neq 0.$$

Ainsi (48.8) ne satisfait pas à l'équation (48.5). On verrait de même que φ_0 et φ_0 ne peuvent pas être solution de l'équation (48.6).

Il semble que le tenseur $q_{\alpha\beta}^*$ ne peut jouer le rôle de tenseur champ électromagnétique qu'en première approximation.

Cette conclusion s'applique également aux tenseurs $f_{\alpha\beta}^*$ et $\varphi_{\alpha\beta}^*$ car, dans la seconde approximation, les équations des champs antisymétriques sont les mêmes, qu'on les écrive avec $a_{\alpha\beta}$, $q_{\alpha\beta}$ ou $h_{\alpha\beta}$, $f_{\alpha\beta}$ ou $\gamma_{\alpha\beta}$, $\varphi_{\alpha\beta}$.

En particulier elle est valable aussi pour

$$H_{\alpha\beta} = \sqrt{-g} \frac{f_{\alpha\beta}}{\sqrt{f}} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \sqrt{-g} f^{\gamma\delta}$$

tenseur choisi par certains auteurs pour représenter le champ électromagnétique ⁽¹⁷⁾.

(17) F. MAURER. Comptes rendus 242 (1956) p. 3042.

CHAPITRE V

LES ÉQUATIONS APPROCHÉES DE LA THÉORIE D'EINSTEIN-SCHRÖDINGER ET LE TENSEUR D'IMPULSION ÉNERGIE.

Dans le cadre de la relativité générale, les équations d'EINSTEIN :

$$S_{\alpha\beta} = \kappa T_{\alpha\beta},$$

limitent la généralité de la métrique. Elles présentent un caractère très particulier, puisqu'elles établissent le lien entre un tenseur $S_{\alpha\beta}$ d'origine géométrique et un tenseur $T_{\alpha\beta}$ de nature physique.

Le tenseur d'impulsion-énergie $T_{\alpha\beta}$, qui joue le rôle de sources du champ, est absolument étranger à la structure géométrique de la variété espace-temps.

En théorie unitaire, l'introduction artificielle des sources est à éviter. Si l'on admet que la théorie d'EINSTEIN-SCHRÖDINGER unifie champ et sources dans un même schéma géométrique — et c'était certainement conforme à la pensée d'EINSTEIN — on doit écrire les équations sans second membre :

$$R_{\alpha\beta} = 0.$$

Il conviendra de constituer un second membre au moyen de certains termes tirés de $R_{\alpha\beta}$. Les nouveaux premiers membres doivent encore satisfaire à des conditions de conservation. On pourra alors interpréter le second membre comme tenseur d'impulsion-énergie.

49. — Conditions de conservation pour le tenseur d'impulsion-énergie.

Les équations du champ sont, nous l'avons vu, définies par l'ensemble des systèmes :

$$(49.1) \quad \partial_{\rho} g_{\alpha\beta} - L_{\alpha\rho}^{\sigma} g_{\sigma\beta} - L_{\rho\beta}^{\sigma} g_{\alpha\sigma} = 0,$$

$$(49.2) \quad \partial_{\rho} (\sqrt{-g} g^{\rho\beta}) = 0,$$

$$(49.3) \quad \underline{R}_{\alpha\beta} = \underline{W}_{\alpha\beta} = 0,$$

$$(49.4) \quad \underline{R}_{\alpha\beta} = \underline{W}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} (\partial_\alpha \Gamma_\beta - \partial_\beta \Gamma_\alpha) = 0.$$

Leur premiers membres sont liés par les identités de conservation :

$$(49.5) \quad \partial_\lambda \mathfrak{M}_e^\lambda + \frac{2}{3} R_{\alpha\beta} \partial_e g^{\alpha\beta} = 0,$$

où

$$\mathfrak{M}_e^\lambda = \sqrt{-g} M_e^\lambda \quad g^{\alpha\beta} = \sqrt{-g} g^{\alpha\beta}$$

et M_e^λ est défini à partir de $R_{\alpha\beta}$ et de $g_{\alpha\beta}$ par :

$$2 L_e^\lambda = R_{e\sigma} g^{\lambda\sigma} + R_{\sigma e} g^{\sigma\lambda},$$

$$M_e^\lambda = L_e^\lambda - \frac{1}{2} \delta_e^\lambda L_i^i.$$

Ces identités sont satisfaites pour tout ensemble $(g_{\alpha\beta}, \Gamma_{\alpha\beta}^2)$ déduit d'une solution $(g_{\alpha\beta}, L_{\alpha\beta}^e)$ des équations (49.1) (49.2).

Considérons un tenseur symétrique à deux indices $a_{\alpha\beta}$, sur lequel aucune hypothèse n'est faite a priori excepté les hypothèses connues que doit vérifier tout tenseur métrique. Soient $G_{\alpha\beta}$ le tenseur de RICCI formé avec les symboles de CHRISTOFFEL relatifs à $a_{\alpha\beta}$ et $S_{\alpha\beta} \left(= G_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} G a_{\alpha\beta} \right)$ le tenseur d'EINSTEIN correspondant. On obtient un tenseur d'impulsion-énergie en théorie unitaire en décomposant la partie symétrique du tenseur de RICCI $\underline{R}_{\alpha\beta}$ en la somme du tenseur $G_{\alpha\beta}$ et des termes complémentaires. Il vient ainsi :

$$(49.6) \quad \underline{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} a_{\alpha\beta} \underline{R}_{e\sigma} a^{e\sigma} = S_{\alpha\beta} - \chi T_{\alpha\beta},$$

où nous avons représenté par $-\chi T_{\alpha\beta}$ l'ensemble des termes complémentaires :

$$(49.7) \quad -\chi T_{\alpha\beta} = Z_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} a_{\alpha\beta} Z_{e\sigma} a^{e\sigma} \quad (Z_{\alpha\beta} = \underline{R}_{\alpha\beta} - G_{\alpha\beta}).$$

Les équations :

$$(49.8) \quad S_{\alpha\beta} - \chi T_{\alpha\beta} = 0$$

sont équivalentes aux équations du champ (49.3). Si l'on fait passer $-\chi T_{\alpha\beta}$ au second membre, ces équations auront la forme des équations du cas

intérieur de la relativité générale, $T_{\alpha\beta}$ y jouant le rôle du tenseur d'impulsion-énergie. Nous nous proposons d'étudier si le tenseur $T_{\alpha\beta}$ satisfait aux conditions de conservation :

$$(49.9) \quad \nabla_\alpha T^\alpha_\beta = 0,$$

∇_α étant l'opérateur de dérivation covariante dans la métrique $a_{\alpha\beta}$.

En séparant les termes contenant $\underline{R_{\alpha\beta}}$ de ceux contenant $\underline{\hat{R}_{\alpha\beta}}$, on voit que le premier membre de (49.5) est égal à :

$$\begin{aligned} \partial_\lambda (R_{\underline{\rho\sigma}} \mathfrak{g}^{\lambda\sigma} - \frac{1}{2} \delta^\lambda_\sigma R_{\underline{\alpha\beta}} \mathfrak{g}^{\alpha\beta}) + \frac{1}{2} R_{\underline{\alpha\beta}} \partial_\rho \mathfrak{g}^{\alpha\beta} \\ - \frac{1}{2} (\partial_\rho R_{\underline{\alpha\beta}} + \partial_\alpha R_{\underline{\beta\rho}} + \partial_\beta R_{\underline{\rho\alpha}}) \mathfrak{g}^{\alpha\beta} + R_{\underline{\rho\sigma}} \partial_\lambda \mathfrak{g}^{\lambda\sigma} \end{aligned}$$

Cherchons à quelle condition la quantité

$$(49.10) \quad \frac{1}{\sqrt{-a}} [\partial_\lambda (R_{\underline{\rho\sigma}} \mathfrak{g}^{\lambda\sigma} - \frac{1}{2} \delta^\lambda_\sigma R_{\underline{\alpha\beta}} \mathfrak{g}^{\alpha\beta}) + \frac{1}{2} R_{\underline{\alpha\beta}} \partial_\rho \mathfrak{g}^{\alpha\beta}]$$

est la divergence, dans la métrique $a_{\alpha\beta}$, d'un tenseur. La forme bien connue de (49.10) montre qu'il suffit de choisir le tenseur :

$$\lambda (R_{\underline{\alpha\beta}} - \frac{1}{2} a_{\alpha\beta} R_{\underline{\rho\sigma}} a^{\rho\sigma}) \quad (\lambda, \text{ scalaire constant})$$

dont la divergence peut s'écrire :

$$\frac{\lambda}{\sqrt{-a}} [\partial_\lambda (R_{\underline{\rho\sigma}} a^{\lambda\sigma} \sqrt{-a} - \frac{1}{2} \delta^\lambda_\sigma R_{\underline{\alpha\beta}} a^{\alpha\beta} \sqrt{-a}) + R_{\underline{\alpha\beta}} \partial_\rho (a^{\alpha\beta} \sqrt{-a})].$$

L'identification de cette expression avec (49.10) donne la relation :

$$(\mathfrak{g}^{\alpha\beta} =) g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} = \lambda a^{\alpha\beta} \sqrt{-a}$$

d'où l'on tire :

$$g^2 = \lambda^4 a h, \quad a^{\alpha\beta} = \lambda \sqrt{h/g} h^{\alpha\beta}.$$

Lorsque la partie antisymétrique $g^{\alpha\beta}$ tend vers zéro ($g^{\alpha\beta} \rightarrow 0$), $a^{\alpha\beta}$ qui joue le rôle de métrique doit tendre vers $g^{\alpha\beta}$; on en déduit :

$$\lambda = 1 \text{ et } a^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta} \sqrt{h/g}.$$

C'est le tenseur que nous avons obtenu au chapitre III (Cf. paragraphe 33, formule (34.6)).

Ainsi en prenant $a^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta} \sqrt{h/g}$ comme tenseur métrique, les identités (49.5) s'écrivent :

$$(49.11) \quad \frac{1}{\sqrt{-a}} [\nabla_\lambda (S_e^\lambda - \chi T_e^\lambda) - \frac{1}{2} (\partial_e R_{\alpha\beta} + \partial_\alpha R_{\beta e} + \partial_\beta R_{e\alpha}) g^{\alpha\beta} \sqrt{h/g}] \equiv 0.$$

Le tenseur $S_{\alpha\beta}$ étant conservatif, ces identités deviennent :

$$(49.12) \quad \nabla_\lambda (\chi T_e^\lambda) \equiv -\frac{1}{2} (\partial_e R_{\alpha\beta} + \partial_\alpha R_{\beta e} + \partial_\beta R_{e\alpha}) g^{\alpha\beta} \sqrt{h/g}.$$

Pour que les conditions de conservation (49.9) soient satisfaites, il est nécessaire et suffisant que le second membre de (49.12) soit nul, c'est-à-dire si l'on suppose $f^{-1} = \det(g^{\alpha\beta}) \neq 0$, que l'on ait :

$$\partial_\alpha R_{\beta\gamma} + \partial_\beta R_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma R_{\alpha\beta} = 0,$$

condition d'ailleurs identique à $\partial_\alpha W_{\beta\gamma} + \partial_\beta W_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma W_{\alpha\beta} = 0$, d'après la relation entre $R_{\alpha\beta}$ et $W_{\alpha\beta}$. Sur (49.12) on voit, en particulier, que les équations de champ $R_{\alpha\beta} = 0$ entraînent (49.9).

Le coefficient $\sqrt{h/g}$ peut être introduit par différentes considérations. On est arrivé à cette valeur d'abord par des considérations sur la théorie de BORN-INFELD⁽¹⁹⁾. Nous le trouvons ensuite par les conditions d'isothermie, étroitement liées aux variétés caractéristiques et également par les conditions de conservation du tenseur d'énergie que l'on extrait des équations du champ. Nous pouvons dire que dans le choix de la métrique, le problème de CAUCHY joue un rôle fondamental en déterminant ce tenseur (à un coefficient de proportionnalité près). Le rôle des autres considérations est secondaire ; il consiste simplement à préciser la valeur de ce coefficient. On conçoit par exemple, que les conditions d'isothermie, au nombre de quatre, ne suffisent pas à nous donner les dix composantes du tenseur métrique.

(19) S. MAVRIDES. J. Physique Rad. 16 (1955) p. 482.

50. — Les équations rigoureuses des champs.

Nous formons les équations de la théorie d'EINSTEIN-SCHRÖDINGER en fonction des champs symétrique $a^{\alpha\beta}$ et antisymétrique $q^{\alpha\beta}$ définis par les relations :

$$(50.1) \quad a^{\alpha\beta} = \sqrt{h/g} \, h^{\alpha\beta}, \quad q^{\alpha\beta} = \sqrt{h/g} \, f^{\alpha\beta}.$$

Nous avons d'abord, d'après (50.1) :

$$\partial_e (\sqrt{-g} \, f^{e\beta}) = \partial_e (\sqrt{-a} \, q^{e\beta}) = -\frac{1}{\sqrt{-a}} \nabla_e q^{e\beta}.$$

L'équation (49.2) est donc équivalente à :

$$(E) \quad \nabla_e q^{e\beta} = 0.$$

Scindons la connexion L en parties symétrique et antisymétrique en posant :

$$(50.2) \quad L_{\alpha\beta}^e = \left\{ \begin{matrix} e \\ \alpha \, \beta \end{matrix} \right\} + w_{\alpha\beta}^e + \underline{L_{\alpha\beta}^e} \quad \left(\underline{L_{\alpha\beta}^e} = \left\{ \begin{matrix} e \\ \alpha \, \beta \end{matrix} \right\} + w_{\alpha\beta}^e \right)$$

$\left\{ \begin{matrix} e \\ \alpha \, \beta \end{matrix} \right\}$ représentant les symboles de CHRISTOFFEL formés avec les $a_{\alpha\beta}$.

Les équations (49.4) et (49.3) s'écrivent ainsi :

$$(E') \quad R_{\alpha\beta} = \nabla_e \underline{L_{\alpha\beta}^e} + \underline{L_{\alpha\beta}^e} w_{e\lambda}^\lambda - (w_{\alpha e}^\lambda \underline{L_{\lambda\beta}^e} + w_{\lambda\beta}^e \underline{L_{\alpha e}^\lambda}) - \frac{2}{3} (\partial_\alpha \Gamma_\beta - \partial_\beta \Gamma_\alpha) = 0,$$

$$(G) \quad R_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta} + \nabla_e w_{\alpha\beta}^e - \frac{1}{2} \nabla_\alpha \nabla_\beta \text{Log} |g| + w_{\alpha\beta}^e w_{e\lambda}^\lambda -$$

$$- (w_{\alpha e}^\lambda w_{\lambda\beta}^e + \underline{L_{\alpha e}^\lambda} \underline{L_{\lambda\beta}^e}) = 0.$$

Dans ces équations, la connexion affine, considérée comme fonction des champs et de leurs dérivées premières, est fournie par la solution (unique dans les hypothèses faites) du système (49.1).

Les équations rigoureuses du champ unifié sont alors :

- a) pour l'électromagnétisme : les deux systèmes (E) et (E') ;
- b) pour la gravitation : le système (G).

Le système (G) écrit sous la forme (49.8) nous donnera l'expression du tenseur d'impulsion-énergie.

Il est aisé, en utilisant les formules de la connexion L en fonction de $h^{\alpha\beta}$, $f^{\alpha\beta}$ [42], de calculer L en fonction des tenseurs proportionnels $a^{\alpha\beta}$, $q^{\alpha\beta}$. On trouve ainsi :

$$\begin{aligned}
 (50.3) \quad w_{\mu\nu}^e &= \left\{ \begin{matrix} e \\ \mu \quad \nu \end{matrix} \right\}_{\widehat{h}} - \left\{ \begin{matrix} e \\ \mu \quad \nu \end{matrix} \right\} - \\
 &- \frac{1}{2} a^{\sigma\lambda} [q_{\mu}^{\sigma} (L_{\widehat{\sigma\lambda},\nu} - L_{\widehat{\sigma\nu},\lambda}) + q_{\nu}^{\sigma} (L_{\widehat{\sigma\lambda},\mu} - L_{\widehat{\sigma\mu},\lambda}) - \\
 &- q_{\lambda}^{\sigma} (L_{\widehat{\sigma\mu},\nu} + L_{\widehat{\sigma\nu},\mu})],
 \end{aligned}$$

où la différence entre les symboles de CHRISTOFFEL relatifs à $h_{\alpha\beta}$ et à $a_{\alpha\beta}$ est égale à :

$$\begin{aligned}
 \left\{ \begin{matrix} e \\ \mu \quad \nu \end{matrix} \right\}_{\widehat{h}} - \left\{ \begin{matrix} e \\ \mu \quad \nu \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{g}} a^{e\sigma} \left(a_{\nu\sigma} \partial_{\mu} \sqrt{\frac{g}{a}} + a_{\mu\sigma} \partial_{\nu} \sqrt{\frac{g}{a}} - a_{\mu\nu} \partial_{\sigma} \sqrt{\frac{g}{a}} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left(\delta_{\nu}^e \nabla_{\mu} \text{Log} \frac{g}{a} + \delta_{\mu}^e \nabla_{\nu} \text{Log} \frac{g}{a} - a_{\mu\nu} a^{e\sigma} \nabla_{\sigma} \text{Log} \frac{g}{a} \right)
 \end{aligned}$$

et où la partie antisymétrique $L_{\widehat{\mu\nu},e} = a_{\lambda e} L_{\widehat{\mu\nu}}^{\lambda}$ est donnée par des formules explicites mais qu'il serait trop long de reproduire ici ; nous n'indiquerons que sa valeur approchée, au paragraphe suivant.

51. — Les équations approchées.

Supposons que le champ $q^{\alpha\beta}$ soit petit devant l'unité ainsi que ses dérivées et qu'il admet des développements limités jusqu'à un certain ordre en fonction d'un paramètre ε . Dans les applications, ε joue le rôle du paramètre $1/c^2$. Pour écrire les équations approchées du champ, il n'est pas nécessaire de faire a priori une hypothèse sur l'ordre de grandeur du champ symétrique $a_{\alpha\beta}$. On obtient de cette façon des expressions synthétiques, à partir desquelles on peut déduire si l'on veut les équations approchées pour un développement donné des $a_{\alpha\beta}$.

L'emploi de la solution générale du système (49.1) permet d'obtenir les valeurs approchées de la connexion à un ordre quelconque, sans avoir besoin de faire des approximations successives. On en déduit ensuite les équations approchées du champ au même ordre. L'approximation du deuxi-

ème ordre est suffisante pour les applications physiques ; les équations du champ y prennent une forme relativement simple, et elles fournissent des résultats intéressants.

Nous supposons donc :

$$(51.1) \quad q^{\alpha\beta} = \varepsilon q_1^{\alpha\beta} + \varepsilon^2 q_2^{\alpha\beta} + 0(\varepsilon^3),$$

alors la partie antisymétrique de la connexion a pour valeur :

$$(51.2) \quad L_{\mu\nu}^e = a^{e\sigma} (\nabla_\sigma q_{\mu\nu} - \frac{1}{2} q_{\mu\nu\sigma}) + 0(\varepsilon^3),$$

d'où :

$$(51.3) \quad w_{\mu\nu}^e = \frac{1}{4} \left(\delta_\nu^e \nabla_\mu \text{Log} \frac{g}{a} + \delta_\mu^e \nabla_\nu \text{Log} \frac{g}{a} - a_{\mu\nu} a^{e\sigma} \nabla_\sigma \text{Log} \frac{g}{a} \right) + \\ + \frac{1}{2} (q_{\mu\nu}^\sigma \nabla_\sigma q_{\nu}^e + q_{\nu}^\sigma \nabla_\sigma q_{\mu}^e) - \frac{1}{2} q^{\sigma e} (\nabla_\nu q_{\sigma\mu} + \nabla_\mu q_{\sigma\nu}) + 0(\varepsilon^3)$$

avec

$$(51.4) \quad \frac{g}{a} = 1 + \frac{a}{q} + \frac{1}{2} q_{\alpha\beta} q^{\alpha\beta} = 1 + \frac{1}{2} q_{\alpha\beta} q^{\alpha\beta} + 0(\varepsilon^4).$$

Posons :

$$(51.5) \quad \partial^\alpha \Gamma_\beta - \partial_\beta \Gamma_\alpha = -\frac{3}{4} \chi E_{\alpha\beta},$$

On déduit immédiatement de (E), (E') et de (G) :

a) pour l'électromagnétisme :

$$(51.6) \quad \nabla_\alpha q^{\alpha\beta} = 0,$$

$$(51.7) \quad \nabla_e \nabla^e q_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \nabla^e q_{\mu\nu e} = -\frac{\chi}{2} F_{\mu\nu} + 0(\varepsilon^3) \quad \nabla^\alpha = a^{\alpha\lambda} \nabla_\lambda;$$

b) pour la gravitation :

$$(51.8) \quad G_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \nabla_e [(q_{\mu\nu}^\sigma \nabla_\sigma q_{\nu}^e + q_{\nu}^\sigma \nabla_\sigma q_{\mu}^e) - q^{\sigma e} (A_\nu q_{\sigma\mu} + \nabla_\mu q_{\sigma\nu})] - \\ - \frac{1}{4} a_{\mu\nu} \nabla_e \nabla^e \text{Log} |g| - (\nabla^\lambda q_{\mu e} - \frac{1}{2} q_{\mu e}^\lambda) (\nabla^e q_{\lambda\nu} - \frac{1}{2} q_{\lambda\nu}^e) = 0(\varepsilon^3).$$

Nous allons transformer les équations (51.7), (51.8) en tenant compte de (51.6).

52. — Les équations électromagnétiques⁽¹⁹⁾.

Considérons maintenant les équations (51.6) (51.7). Pour transformer l'équation (51.7), formons l'expression $\nabla^\rho q_{\mu\nu\rho}$ à partir de la définition des $q_{\mu\nu\rho}$:

$$q_{\mu\nu\rho} = \nabla_\mu q_{\nu\rho} + \nabla_\nu q_{\rho\mu} + \nabla_\rho q_{\mu\nu}.$$

En faisant apparaître $\nabla_\rho \nabla^\rho q_{\mu\nu}$, il vient :

$$\begin{aligned} (52.1) \quad \nabla^\rho q_{\mu\nu\rho} &= \nabla_\rho \nabla^\rho q_{\mu\nu} + \\ &+ a^{\rho\lambda} [(\nabla_\lambda \nabla_\mu - \nabla_\mu \nabla_\lambda) q_{\nu\rho} + (\nabla_\lambda \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\lambda) q_{\rho\mu}] + \\ &+ \nabla_\mu \nabla^\rho q_{\nu\rho} + \nabla_\nu \nabla^\rho q_{\rho\mu}. \end{aligned}$$

En utilisant les relations de commutation des dérivées covariantes :

$$(52.2) \quad (\nabla_\rho \nabla_\sigma - \nabla_\sigma \nabla_\rho) q_{\mu\nu} = G^\tau_{\mu\rho\sigma} q_{\tau\nu} + G^\tau_{\nu\rho\sigma} q_{\mu\tau},$$

et les identités sur le tenseur de RIEMANN-CHRISTOFFEL $G^\rho_{\mu\nu\sigma}$, et en tenant compte aussi de (51.6), on obtient :

$$(52.3) \quad \nabla^\rho q_{\mu\nu\rho} = \nabla_\rho \nabla^\rho q_{\mu\nu} - G^{\rho\sigma}_{\mu\nu} q_{\rho\sigma} - (G^\tau_{\mu\nu} q_{\tau\rho} + G^\tau_{\nu\rho} q_{\tau\mu}),$$

c'est-à-dire, d'après (51.8) :

$$(52.4) \quad \nabla^\rho q_{\mu\nu\rho} = \nabla_\rho \nabla^\rho q_{\mu\nu} - G^{\rho\sigma}_{\mu\nu} q_{\rho\sigma} + 0(\varepsilon^3).$$

Les équations fondamentales de l'électromagnétisme (51.6) (51.7) s'écrivent donc encore :

$$(52.5) \quad (\nabla_\rho q^{\rho\beta} = 0,$$

$$(52.6) \quad (\square q_{\mu\nu} = -\chi F_{\mu\nu} - G^{\tau\sigma}_{\mu\nu} q_{\tau\sigma} + 0(\varepsilon^3), \quad (\square = \nabla^\rho \nabla_\rho).$$

(20) Cf. M. A. TONNELAT. [13].

De ces équations on peut déduire les deux conséquences suivantes :

1) En appliquant l'opérateur ∇^ν à (52.6), on obtient l'équation :

$$(52.7) \quad \nabla^\nu (\nabla^\sigma \nabla_\sigma q_{\mu\nu}) = - \nabla^\nu (\chi F_{\mu\nu}) - (\nabla^\nu G_{\mu\nu}^{\tau\sigma}) q_{\tau\sigma} - G_{\mu\nu}^{\tau\sigma} \nabla^\nu q_{\tau\sigma} + 0(\varepsilon^3),$$

que l'on transforme en :

$$(52.8) \quad 2 G_{\mu\rho}^{\lambda\nu} \nabla^\rho q_{\lambda\nu} + \frac{3}{2} (\nabla_\rho G_\mu^{\rho\lambda\nu}) q_{\lambda\nu} = - \nabla^\nu (\chi F_{\mu\nu}) + 0(\varepsilon^3).$$

Mais on a en contractant les identités de BIANCHI :

$$\nabla_\rho G_{\mu\nu\sigma}^{\rho} = \nabla_\sigma G_{\mu\nu} - \nabla_\nu G_{\mu\sigma}.$$

Par conséquent, le second terme de (52.8) est d'après (51.8) du troisième ordre. On a donc simplement :

$$(52.9) \quad \nabla^\alpha (\chi F_{\mu\alpha}) = - 2 G_{\mu\rho}^{\lambda\alpha} \nabla^\rho q_{\lambda\alpha} + 0(\varepsilon^3).$$

2) Appliquons maintenant ∇_λ à (52.6) et effectuons une permutation circulaire sur les indices λ, μ, ν . En tenant compte de l'équation (51.6), on obtient :

$$(52.10) \quad \square q_{\mu\nu\lambda} = 2 (G_{\mu\lambda}^{\tau\rho} \nabla_\nu q_{\tau\rho} + G_{\lambda\nu}^{\tau\rho} \nabla_\mu q_{\tau\rho} + G_{\nu\mu}^{\tau\rho} \nabla_\lambda q_{\tau\rho}) - \\ - (G_{\mu\lambda}^{\tau\rho} q_{\tau\rho\nu} + G_{\lambda\nu}^{\tau\rho} q_{\tau\rho\mu} + G_{\nu\mu}^{\tau\rho} q_{\tau\rho\lambda}) + 0(\varepsilon^3),$$

On montre que le deuxième terme du second membre est égal à $G_{\rho\sigma}^{\rho\sigma} q_{\mu\nu\lambda}$, qui est du troisième ordre. L'équation (52.10) s'écrit encore :

$$\square q_{\mu\nu\lambda} = 2 (G_{\mu\lambda}^{\tau\rho} \nabla_\nu q_{\tau\rho} + G_{\lambda\nu}^{\tau\rho} \nabla_\mu q_{\tau\rho} + G_{\nu\mu}^{\tau\rho} \nabla_\lambda q_{\tau\rho}) + 0(\varepsilon^3),$$

ou, en multipliant les deux membres par $(1/6)\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}$ et en sommant :

$$(52.11) \quad \frac{1}{6} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \square q_{\mu\nu\lambda} = - \varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} G_{\mu\nu}^{\tau\rho} (\nabla_\lambda q_{\tau\rho}) + 0(\varepsilon^3).$$

Sous cette forme, on reconnaît l'expression indiquée par E. SCHRÖDINGER pour mettre en évidence l'existence d'un courant lié directement à la présence d'une courbure riemannienne ⁽²¹⁾.

⁽²¹⁾ E. SCHRÖDINGER, Proc. Roy. Ir. Acad. 56 A (1956) p. 13.

53. — Les équations de la gravitation.

Les équations (51.8) s'écrivent encore :

$$\begin{aligned}
 (53.1) \quad G_{\nu\nu} + \frac{1}{2} [q_{\sigma\mu} (V^e V^\sigma - V^\sigma V^e) q_{\nu e} + q_{\sigma\nu} (V^e V^\sigma - V^\sigma V^e) q_{\mu e}] - \\
 - \frac{1}{2} q^{\sigma e} V_e (V_\nu q_{\sigma\mu} + V_\mu q_{\sigma\nu}) - \frac{1}{8} a_{\mu\nu} V_e V^e (q_{\alpha\beta} q^{\alpha\beta}) - \\
 - \frac{1}{4} (q_{\mu e\lambda} V_\nu q^{e\lambda} + q_{\nu e\lambda} V_\mu q^{e\lambda}) + \frac{1}{4} q_{\mu e\lambda} q_\nu^{e\lambda} = 0 \ (\varepsilon^3),
 \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en tenant compte de (51.6) (52.2) :

$$\begin{aligned}
 (53.2) \quad G_{\mu\nu} - \frac{1}{4} (q_{\mu}^{\sigma} G_{\sigma\nu}^e + q_{\nu}^{\sigma} G_{\sigma\mu}^e) q_{\tau e} - \frac{1}{2} q^{\sigma e} V_e (V_\nu q_{\sigma\mu} + V_\mu q_{\sigma\nu}) - \\
 - \frac{1}{8} a_{\mu\nu} V_e V^e (q_{\alpha\beta} q^{\alpha\beta}) - \frac{1}{4} (q_{\mu e\lambda} V_\nu q^{e\lambda} + q_{\nu e\lambda} V_\mu q^{e\lambda}) + \frac{1}{4} q_{\mu e\lambda} q_\nu^{e\lambda} = 0 \ (\varepsilon^3).
 \end{aligned}$$

Par contraction des indices μ, ν dans (53.2) il vient :

$$G - \frac{1}{2} q^{\lambda\sigma} G_{\lambda\sigma}^e q_{\tau e} - \frac{1}{2} V_e V^e (q_{\alpha\beta} q^{\alpha\beta}) + \frac{1}{12} q_{\tau e\lambda} q^{\tau e\lambda} = 0 \ (\varepsilon^3).$$

Ecrivons les équations (53.2) sous la forme (49.8)

$$S_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta},$$

pour mettre en évidence l'expression approchée au second ordre du tenseur d'impulsion-énergie. On trouve :

$$(53.3) \quad T_{\mu\nu} = (A_{\mu\nu} + M_{\mu\nu} + X_{\mu\nu} + Y_{\mu\nu}) + 0 \ (\varepsilon^3),$$

en posant :

$$(53.4) \quad A_{\mu\nu} = \frac{1}{4} a_{\mu\nu} q^{e\sigma} F_{e\sigma},$$

$$(24.5) \quad M_{\mu\nu} = \frac{1}{4\chi} (-q_{\mu e\lambda} q_\nu^{e\lambda} + \frac{1}{6} a_{\mu\nu} q_{\tau\sigma\lambda} q^{\tau\sigma\lambda}),$$

$$(53.6) \quad X_{\mu\nu} = \frac{1}{4\chi} [2 q^{\sigma e} \nabla_e (\nabla_\nu q_{\sigma\mu} + \nabla_\mu q_{\sigma\nu}) + (q_{\mu e\lambda} \nabla_\nu q^{e\lambda} + q_{\nu e\lambda} \nabla_\mu q^{e\lambda}) - \\ - a_{\mu\nu} \nabla_e q_{\lambda\sigma} \nabla^e q^{\lambda\sigma}],$$

$$(53.7) \quad Y_{\mu\nu} = \frac{1}{4\chi} (G_{\sigma\nu}^e q_\mu^\sigma + G_{\sigma\mu}^e q_\nu^\sigma) q_{\tau e}^\tau.$$

$A_{\mu\nu}$ fait intervenir les produits des $q^{\alpha\beta}$ et $F_{\alpha\beta}$ ($= -\frac{4}{3\chi}(\partial_\alpha \Gamma_\beta - \partial_\beta \Gamma_\alpha)$); $M_{\mu\nu}$ ne dépend que du courant $q_{\alpha\beta\lambda}$ et joue le rôle d'un tenseur matériel; $X_{\mu\nu}$ contient les dérivées secondes de $q^{\alpha\beta}$; $Y_{\mu\nu}$ introduit explicitement la courbure riemannienne rapportée aux $a_{\alpha\beta}$.

On est assuré, par le résultat du paragraphe 49, que l'ensemble du tenseur (53.3) vérifie les conditions :

$$\nabla_\alpha (\chi T^\alpha_\beta) = 0 \ (\varepsilon^3),$$

et qu'il possède ainsi les propriétés qui caractérisent le tenseur d'impulsion-énergie.

D'une façon générale, l'expression $R_{\alpha\beta}$ d'ordre p ne contient que les $q^{\alpha\beta}$ d'ordre $\leq p-1$; à la p -ème approximation, nous devons supposer que les équations du champ d'ordre $(p-1)$ sont satisfaites, en particulier nous avons $R_{\alpha\beta} = 0 \ (\varepsilon^p)$ et les conditions de conservation du tenseur d'énergie d'ordre p sont certainement satisfaites.

L'expression du tenseur d'énergie que nous obtenons est assez différente de celle que l'on obtient avec la métrique $\gamma_{\alpha\beta}$ et le champ $\varphi_{\alpha\beta}$, expression dans laquelle figure un tenseur d'énergie électromagnétique symétrisé, dans le cas où existent à la fois champ et induction :⁽²²⁾

$$\tau_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} (\varphi_{\mu\tau} F^\tau_\nu + \varphi_{\nu\tau} F^\tau_\mu) + \frac{1}{4} \gamma_{\mu\nu} \varphi_{\lambda\tau} F^{\lambda\tau}.$$

REMARQUE. — Les formules de $w_{\alpha\beta}^e \left(= L_{\alpha\beta}^e - \left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ \alpha \ \beta \end{smallmatrix} \right\} \right)$, les équations de la gravitation et l'expression du tenseur d'énergie qui s'en déduit, ont été écrites à la seconde approximation. En réalité, elles sont encore valables, sans changement, à la troisième approximation. Mais les équations de l'électromagnétisme (51.7) sont strictement valables à la seconde approximation.

⁽²²⁾ M. A. TONNELAT. [3].

54. — Introduction des coordonnées isothermes dans les équations approchées.

Rappelons qu'en théorie du champ unifié, un système de coordonnées (x^a) est dit isotherme si les quatre quantités $(-g^{\mu\nu} L_{\mu\nu}^a)$ sont nulles :

$$(54.1) \quad F^a \equiv -g^{\mu\nu} L_{\mu\nu}^a = 0.$$

D'après le premier groupe des équations du champ (44.1) (49.2), les conditions (54.1) sont les mêmes que les suivantes :

$$(54.2) \quad A_2(x^a) = -a^{\mu\nu} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu \nu \end{matrix} \right\} = 0,$$

qui sont les conditions d'isothermie de la relativité générale.

On sait qu'en relativité générale, les quantités $A_2(x^a)$ interviennent de façon simple dans le tenseur de RICCI. Les équations d'EINSTEIN du cas extérieur peuvent ainsi se mettre sous la forme :

$$(54.3) \quad G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} a^{\sigma\sigma} \partial_{\sigma\sigma} a_{\mu\nu} - \frac{1}{2} a_{\mu\sigma} \partial_\nu (A_2 x^\sigma) - \frac{1}{2} a_{\nu\sigma} \partial_\mu (A_2 x^\sigma) + \\ + H_{\mu\nu} (a_{\alpha\beta}, \partial_\gamma a_{\alpha\beta}) = 0.$$

Par conséquent, si les coordonnées sont isothermes la séparation des potentiels, dans les dérivées secondes, est complète.

Considérons maintenant les équations de l'électromagnétisme (52.5) (52.6) et de la gravitation (53.2) que nous récrivons :

$$(54.4) \quad \nabla_e q^{e\beta} = 0,$$

$$(54.5) \quad \nabla_e \nabla^e q_{\mu\nu} = -\chi F_{\mu\nu} - G_{\mu\nu}^{\tau e} q_{\tau e} + 0(\varepsilon^3);$$

$$(54.6) \quad G_{\mu\nu} = \frac{1}{4} (q_{\mu}^{\sigma} G_{\sigma\nu}^{\tau e} + q_{\nu}^{\sigma} G_{\sigma\mu}^{\tau e}) q_{\tau e} - \frac{1}{2} q^{\sigma e} \nabla_e (\nabla_\nu q_{\sigma\mu} + \nabla_\mu q_{\sigma\nu}) - \\ - \frac{1}{8} a_{\mu\nu} \nabla_e \nabla^e (q_{\alpha\beta} q^{\alpha\beta}) - \frac{1}{4} (q_{\mu e \lambda} \nabla_\nu q^{e\lambda} + q_{\nu e \lambda} \nabla_\mu q^{e\lambda}) + \\ + \frac{1}{4} q_{\mu e \lambda} q_{\nu}^{e\lambda} = 0(\varepsilon^3),$$

et cherchons ce qu'elle deviennent en coordonnées isothermes. Le terme $G_{\mu\nu}$ se simplifie suivant (54.3); mais il y aura peu de simplification pour les autres termes, les quantités F^a interviennent seulement dans $V_\varrho V^\varrho q_{\mu\nu}$ et $-\frac{1}{8} a_{\mu\nu} \Gamma_\varrho \Gamma^\varrho (q_{\alpha\beta} q^{\alpha\beta})$. Nous n'explicitons que les dérivées secondes; le symbole $\sim$ désignera une congruence modulo des fonctions additives des champs et de leurs dérivées premières.

a) Il n'y a aucun changement dans (54.4). Dans (54.5) les dérivées secondes du premier membre se réduisent au dalembertien $a^{\varrho\sigma} \partial_{\varrho\sigma} q_{\mu\nu}$ et à des dérivées de F^a , compte tenu de (54.3) (54.6):

$$\begin{aligned} V^\varrho V_\varrho q_{\mu\nu} &\sim a^{\varrho\sigma} \partial_{\varrho\sigma} q_{\mu\nu} - a^{\varrho\sigma} (\partial_\sigma [\mu \varrho, \lambda] q^\lambda_\nu + \partial_\sigma [\nu \varrho, \lambda] q^\lambda_\mu) \\ &\sim a^{\varrho\sigma} \partial_{\varrho\sigma} q_{\mu\nu} - \frac{1}{2} a^{\varrho\sigma} (\partial_{\varrho\sigma} a_{\mu\lambda} q^\lambda_\nu + \partial_{\varrho\sigma} a_{\nu\lambda} q^\lambda_\mu) \\ &\quad - \frac{1}{2} (\partial_\mu F^\lambda q^\lambda_\nu + \partial_\nu F^\lambda q^\lambda_\mu) + \frac{1}{2} (a_{\mu\lambda} q^\lambda_\nu + a_{\nu\lambda} q^\lambda_\mu) \partial_\gamma F^\lambda + 0(\varepsilon^3), \end{aligned}$$

d'autre part :

$$- G^\tau_{\mu\tau} q_{\tau\sigma} \sim - q^{\tau\sigma} (\partial_{\nu\sigma} a_{\mu\tau} - \partial_{\mu\sigma} a_{\nu\tau}).$$

En coordonnées isothermes, les équations (54.5) s'écrivent donc :

$$(54.7) \quad a^{\varrho\sigma} \partial_{\varrho\sigma} q_{\mu\nu} = - q^{\tau\sigma} (\partial_{\nu\sigma} a_{\mu\tau} - \partial_{\mu\sigma} a_{\nu\tau}) - \chi F_{\mu\nu} + \Phi_{\mu\nu} + 0(\varepsilon^3),$$

$\Phi_{\mu\nu}$ étant une fonction des champs et de leurs dérivées premières.

b) Les dérivées secondes des champs qui figurent dans les équations (54.6) sont contenues dans $G_{\mu\nu}$ suivant la formule (54.3), et dans les termes :

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{4} (q^\sigma_\mu G^\tau_{\sigma\nu} + q^\sigma_\nu G^\tau_{\sigma\mu}) q_{\tau\varrho} - \frac{1}{2} q^{\sigma\varrho} V_\varrho (V_\nu q_{\sigma\mu} + V_\mu q_{\sigma\nu}) - \\ &\quad - \frac{1}{8} a_{\mu\nu} V_\varrho V^\varrho (q_{\alpha\beta} q^{\alpha\beta}), \end{aligned}$$

qui sont congrus $\sim$ à :

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{4} [q^\sigma_\mu (\partial_{\varrho\nu} a_{\sigma\tau} - \partial_{\varrho\sigma} a_{\nu\tau}) + q^\sigma_\nu (\partial_{\varrho\mu} a_{\sigma\tau} - \partial_{\varrho\sigma} a_{\mu\tau})] q^{\tau\varrho} - \\ &-\frac{1}{2} q^{\sigma\varrho} (\partial_{\varrho\nu} q_{\sigma\mu} + \partial_{\varrho\mu} q_{\sigma\nu} - \partial_\varrho [\sigma \mu, \lambda] q^\lambda_\nu - \partial_\varrho [\sigma \nu, \lambda] q^\lambda_\mu - \\ &- 2 \partial_\varrho [\mu \nu, \lambda] q^\lambda_\sigma) - \frac{1}{4} a_{\mu\nu} \tilde{q}^{\alpha\beta} (a^{\varrho\sigma} \partial_{\varrho\sigma} q_{\alpha\beta}), \end{aligned}$$

après simplification on obtient :

$$-\frac{1}{2} q^{\sigma e} (\partial_{\sigma \nu} q_{\underline{\sigma \mu}} + \partial_{\sigma \mu} q_{\underline{\sigma \nu}}) + q^{\sigma e} \partial_e [\mu \nu, \lambda] q_{\underline{\sigma}}^{\lambda} - \frac{1}{4} a_{\mu \nu} q^{\alpha \beta} (a^{\sigma e} \partial_{\sigma e} q_{\underline{\alpha \beta}}).$$

En coordonnées isothermes, les équations (54.6) prennent donc la forme :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} a^{\sigma e} \partial_{\sigma e} a_{\mu \nu} &= \frac{1}{2} q^{\sigma e} (\partial_{\sigma \nu} q_{\underline{\sigma \mu}} + \partial_{\sigma \mu} q_{\underline{\sigma \nu}}) - q^{\sigma e} \partial_e [\mu \nu, \lambda] q_{\underline{\sigma}}^{\lambda} + \\ &+ \frac{1}{4} a_{\mu \nu} q^{\alpha \beta} (a^{\sigma e} \partial_{\sigma e} q_{\underline{\alpha \beta}}) + \psi_{\mu \nu} + 0 (\varepsilon^3), \end{aligned}$$

$\psi_{\mu \nu}$ désignant une fonction des champs et de leurs dérivées premières.

Sur (54.7) et (54.8) on voit que la séparation des champs n'existe pas pour l'ensemble des dérivées secondes (excepté évidemment pour l'équation (54.8) du premier ordre). Mais elle a lieu pour les dérivées secondes ne contenant pas en facteur le champ petit $q^{\alpha \beta}$, dérivées que nous avons isolées au premier membre. Si l'on tient compte des hypothèses quasi-galiléennes, la séparation des champs devient donc effective, et l'on peut résoudre les équations (54.7) (54.8) par des méthodes d'approximation. Les équations que l'on obtient par (54.7) (54.8) en faisant les développements limités :

$$a_{\alpha \beta} = \delta_{\alpha \beta} + \varepsilon a_{\alpha \beta}^{(1)} + \varepsilon^2 a_{\alpha \beta}^{(2)} + 0 (\varepsilon^3),$$

ne sont autres que les équations approchées écrites au paragraphe 42 du chapitre IV.

NOTE. — Considérons les conditions plus générales :

$$-g^{\mu \nu} \Gamma_{\mu \nu}^{\alpha} \equiv F^{\alpha} - \frac{2}{3} g^{\alpha \lambda} \Gamma_{\lambda} = 0 \quad (F^{\alpha} \equiv -g^{\mu \nu} L_{\mu \nu}^{\alpha}).$$

Dans un système de coordonnées satisfaisant à ces conditions, on a :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} a_{\mu \alpha} \partial_{\nu} (F^{\alpha}) - \frac{1}{2} a_{\nu \mu} \partial_{\mu} (F^{\alpha}) &= \frac{1}{3} a_{\mu \alpha} \partial_{\nu} (g^{\alpha \lambda} \Gamma_{\lambda}) + \\ &+ \frac{1}{3} a_{\nu \alpha} \partial_{\mu} (g^{\alpha \lambda} \Gamma_{\lambda}) \\ &\sim \frac{1}{3} g^{\alpha \lambda} (a_{\mu \alpha} \partial_{\nu} \Gamma_{\lambda} + a_{\nu \alpha} \partial_{\mu} \Gamma_{\lambda}). \end{aligned}$$

Supposons que les champs soient quasi-galiléens. En prenant par exemple :

$$\Gamma_{\lambda} = \frac{3}{2} q^{\sigma\rho} V_{\rho} q_{\sigma\lambda},$$

les équations (54.9) deviennent simplement :

$$-\frac{1}{2} a^{\rho\sigma} \partial_{\rho\sigma} a_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} + 0(\varepsilon^3).$$

55. — Le tenseur d'énergie et les équations de mouvement.

Nous avons remarqué à la fin du paragraphe 53, la différence principale entre les tenseurs d'énergie obtenus suivant que l'on écrit les équations du champ avec $a^{\alpha\beta}$, $q^{\alpha\beta}$ ou avec $\gamma_{\alpha\beta}$, $\varphi_{\alpha\beta}$. L'absence d'un tenseur de MAXWELL dans le premier cas et sa présence dans le deuxième cas s'expliquent par les valeurs différentes des écarts de $L_{\mu\nu}^0$ aux symboles de CHRISTOFFEL. Si l'on pose :

$$L_{\mu\nu}^0 = \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu \nu \end{matrix} \right\}_a + w_{\mu\nu}^0,$$

$$L_{\mu\nu}^0 = \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu \nu \end{matrix} \right\}_\gamma + u_{\mu\nu}^0,$$

l'expression de $u_{\mu\nu}^0$ contient des termes $V^{\rho} \varphi_{\mu\nu\rho}$, alors que les termes analogues $V^{\rho} q_{\mu\nu\rho}$ n'existent pas dans $w_{\mu\nu}^0$. Or c'est par l'intermédiaire des termes $V^{\rho} \varphi_{\mu\nu\rho}$, et aussi de $V_{\rho} V^{\rho} \varphi_{\mu\nu}$, que $F_{\mu\nu}$, intervient dans les équations de la gravitation pour donner le tenseur de MAXWELL $\tau_{\mu\nu}$. C'est pourquoi, dans le cas des équations (53.2), écrites sous la forme (49.8), à la place de $\tau_{\mu\nu}$ on ne trouve que le tenseur $A_{\mu\nu} = (1/4) a_{\mu\nu} q^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$.

Le résultat négatif qui a été signalé au sujet des équations de mouvement dans la théorie du champ unifié, est pour une part en liaison avec la solution particulière que l'on considère pour le tenseurs $\varphi_{\alpha\beta}$ ou pour $q^{\alpha\beta}$. Cette solution entraîne la disparition de $A_{\mu\nu}$ (ou $\tau_{\mu\nu}$) et de $M_{\mu\nu}$. Il faudrait donc modifier les approximations quasi-statiques usuelles de façon à avoir $q_{\mu\nu\rho}$ (ou $\varphi_{\mu\nu\rho}$) $\neq 0$ et par conséquent $F_{\mu\nu} \neq 0$. Une influence possible du champ antisymétrique dans les équations de mouvement pourrait ainsi être mise en évidence. Dans cette voie, la remarque que nous avons rappelée au sujet de $\tau_{\mu\nu}$, nous incline à penser que ce serait plutôt par l'emploi de $\gamma_{\alpha\beta}$, $\varphi_{\alpha\beta}$ et non de $a^{\alpha\beta}$, $q^{\alpha\beta}$ que la loi classique de LORENTZ pourrait être

obtenue pour les particules chargées. Une éventuelle déduction des équations de mouvement d'une particule chargée basée sur l'intervention simultanée des tenseurs $\tau_{\mu\nu}$ et $M_{\mu\nu}$ ne semble pas, d'après Mme M. A. TONNELAT, totalement hors d'atteinte de la théorie du champ unifié d'EINSTEIN-SCHRÖDINGER.

56. — Conclusions générales.

La théorie d'EINSTEIN-SCHRÖDINGER part d'un formalisme très général, elle a l'avantage de ne pas restreindre au départ les possibilités que présente une théorie affine quelconque. Mais la richesse de structure laisse subsister des ambiguïtés à la base de la théorie, et le caractère unitaire de la théorie rend lui-même très difficile l'interprétation des grandeurs géométriques qu'on peut introduire. Le problème de CAUCHY, il est vrai, a apporté la réponse à une question importante : le choix du tenseur métrique. Mais la réponse n'est pas entièrement satisfaisante. Les variétés caractéristiques des équations du champ sont tangentes en chaque point de V_4 à deux cônes d'équations :

$$h_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = 0 \ (C_1) \text{ et } \overline{\gamma}_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = 0 \ (C_2),$$

Le cône (C_1) est intérieur au cône (C_2) , ce qui conduit à penser que c'est le cône (C_2) qui définira les surfaces d'ondes gravitationnelles⁽²³⁾. Mais la métrique $\sqrt{g/h} h_{\alpha\beta}$ qui correspond au premier cône a des propriétés intéressantes et elle simplifie beaucoup de calculs.

Une autre difficulté se présente dans le problème du tenseur d'énergie, en particulier à propos du cas matière pure. La décomposition du tenseur de RICCI n'est pas univoquement déterminée. Habituellement on prend une métrique telle que les écarts avec $g_{\alpha\beta}$ ou avec $g^{\alpha\beta}$ soient petits. On fait ainsi apparaître le courant de charge (par exemple le courant $q_{\alpha\beta\gamma}$ si la métrique est $a_{\alpha\beta} = \sqrt{g/h} h_{\alpha\beta}$). Le vecteur courant et aussi le tenseur d'énergie, disparaît en même temps que le champ antisymétrique $g_{\alpha\beta}$. Si l'on veut retrouver et la manifestation du courant de charge et l'apport de la matière pure, il convient donc d'envisager d'une autre façon la séparation du tenseur de RICCI. On pourrait dans cet ordre d'idées décomposer le tenseur symétrique $a_{\alpha\beta}$ lui-même en deux parties : l'une représenterait le tenseur gravitationnel ; l'autre comprendrait un vecteur, qui pourrait être le vecteur vitesse unitaire, et un potentiel vecteur susceptible d'introduire les phénomènes d'induction.

⁽²³⁾ F. MAURER. [40].

BIBLIOGRAPHIE

1. Généralités.

- [1] P. G. BERGMAN - *Introduction to the theory of relativity*. Prentice Hal, New York (1942).
- [2] E. CARTAN - *Les especes à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée*. Ann. Ec. Norm. Sup., t. 40 (1923).
- [3] J. CHAZY - *La théorie de la relativité et la mécanique céleste*. Gauthier-Villars, Paris (1930).
- [4] G. DARMOIS - *Les équations de la gravitation einsteinienne*. Mémorial des Sc. math. fasc. 25 (1927).
- [5] A. EDDINGTON - *The mathematical theory of relativity*. Cambridge University Press (1923).
- [6] A. EINSTEIN - *Quatre conférences sur la théorie de la relativité faites à l'Université de Princeton*. Trad. M. Solovine, Gauthier-Villars, Paris (1925).
- [7] A. EINSTEIN - *The meaning of relativity*. 3rd ed. Princeton University Press (1950).
- [8] A. LICHNEROWICZ - *Éléments de calcul tensoriel*. Armand Colin, Paris, (1951).
- [9] A. LICHNEROWICZ - *Les théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*. Masson, Paris (1954).
- [10] E. SCHRÖDINGER - *Space time structure*. Cambridge (1950).
- [11] M. A. TONNELAT - *La théorie du champ unifié d'Einstein et quelques-uns de ses développements*. Gauthier-Villars, Paris (1954).

2. Equations du champ et équations du mouvement.

- [12] A. EINSTEIN - *The Bianchi identities in the generalized theory of gravitation*. Canad. J. Math., 2 (1950) p. 120-128.
- [13] M. A. TONNELAT - *Les équations approchées de la théorie du champ unifié d'Einstein-Schrödinger*. Il Nuovo Cimento, X-3 (1956) p. 902-920.
- [14] M. WYMAN - *Unified field theory*. Canad. J. Math., 2 (1950) p. 427-439.

Equations du mouvement en relativité générale.

A) MÉTHODE DU TENSEUR D'ÉNERGIE.

- [15] V. A. FOCK - *Sur le mouvement des masse finies d'après la théorie de la gravitation einsteinienne*. J. Phys. Ac. Sc. U.R.S.S., 1 (1939) p. 81-116.
- [16] F. HENNEQUIN - *Sur l'approximation des équations de la relativité générale pour un champ quasi-galiléen*. Comptes rendus Ac. Sc. Paris, 239 (1954) p. 1464-1466.
- [17] F. HENNEQUIN - *Etude mathématique des approximations en relativité générale et en théorie unitaire de Jordan-Thiry*. Thèse de doctorat, Paris (1956).
- [18] L. INFELD - *On the motion of bodies in general relativity theory*. Acta Phys. Polonica, 10 (1954) p. 187-204.

- [19] V. V. NARLIKAR - *The gravitational equations of motion in relativity*. Proc. Indian Acad. Sc., Sec. A., 14 (1941) p. 187-195.
- [20] PAPAPETROU - *Equations of motion in general relativity. I et II*. Proc. Phys. Soc., A., 64 (1951) p. 57-75 et 302-310.
- [21] PETROVA - *Sur les équations de mouvement et le tenseur matériel pour des systèmes de masses finies en relativité générale*. Journ. Phys. exp. et theor. Akad. Nauk. S.S.S.R., 19 (1949) p. 989.

B) MÉTHODE D'EINSTEIN, INFELD, HOFFMANN.

- [22] B. BERTOTTI - *On the motion of charged particles in general relativity*. Il Nuovo Cimento, X-2 (1955) p. 231-240.
- [23] D. M. CHASE - *Equations of motion of charged test particles in general relativity*. Phys. Rev., 95 (1954) p. 243-246.
- [24] A. EINSTEIN, J. GROMMER - *Allgemeine Relativitätstheorie und Bewegungsgesetz*. Sitzungs. Ak. Berlin, (1927) p. 2-13.
- [25] A. EINSTEIN, L. INFELD, B. HOFFMANN - *The gravitational equations and the problem of motion. I*. Ann. Math., 39 (1938) p. 65-100.
- [26] A. EINSTEIN, L. INFELD - *The gravitational equations and the problem of motion. II*. Ann. Math., 41 (1940) p. 455-464.
- [27] A. EINSTEIN, L. INFELD - *On the motion of particles in general relativity*. Canad. J. Math., 1 (1949) p. 209-241.
- [28] L. INFELD, A. SCHILD - *On the motion of test particles in general relativity theory*. Review of mod. Phys., 21 (1949) p. 408-413.
- [29] L. INFELD, P. R. WALLACE - *The equations of motion in electrodynamics*. Phys. Rev., 57 (1940) p. 797-806.
- [30] L. INFELD, A. E. SCHEIDEGGER - *Radiation and gravitational equations of motion*. Canad. J. Math., 3 (1951) p. 284-293.
- [31] L. INFELD - *The coordinate conditions and the equations of motion*. Canad. J. Math., 5 (1953) p. 17-25.
- [32] H. P. ROBERTSON - *The two body problem in general relativity*. Ann. Math., 39 (1938) p. 101-104.

EQUATIONS DU MOUVEMENT EN THÉORIE UNITAIRE.

- [33] W. B. BONNOR - *The equations of motion in the non-symmetric unified field theory*. Proc. Roy. Soc., 226 A (1954) p. 366-377.
- [34] J. CALLAWAY - *The equations of motion in Einstein's new unified field theory*. Phys. Rev., 95 (1954) p. 1567-1570.
- [35] L. INFELD - *The new Einstein theory and the equations of motion*. Acta Phys. Polonica, 10 (1950) p. 284-293.

3. Divers.

- [36] Y. FOURES-BRUHAT - *Théorème d'existence pour certains systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires*. Acta Math., 88 (1952) p. 141-225.

- [37] J. HELY - *Sur la représentation du champ unitaire*. Comptes rendus Ac. Sc. Paris, 239 (1954) p. 385-387.
- [38] A. LICHNERGWICZ - *Problèmes globaux en mécanique relativiste*. Hermann, Paris (1939).
- [39] A. LICHNERGWICZ - *Compatibilité des équations de la théorie unitaire du champ d'Einstein*. Comptes rendus Ac. Sc. Paris, 237 (1953) p. 1383-1386. Journ. rat. Mech., 3 (1954) p. 487-522.
- [40] F. MAURER - *Sur les variétés caractéristiques de la théorie unitaire du champ d'Einstein*. Comptes rendus Ac. Sc. Paris, 242 (1956) p. 1127-1129.
- [41] F. MAURER - *Sur les coordonnées isothermes en théorie unitaire*. Comptes rendus Ac. Sc. Paris, 243 (1956) p. 1196-1198.
- [42] S. MAVRIDÈS - *La solution générale des équations d'Einstein $g^{\mu\nu}_{;e} = 0$* . Comptes rendus Ac. Sc. Paris, 241 (1956) p. 173-174; Il Nuovo Cimento, X-2 (1955) p. 1141-1164.
- [43] PHAM MAU QUAN - *Sur une théorie relativiste des fluides thermodynamiques*. Ann. di Math. pura ed appl., IV-38 (1955).
- [44] PHAM MAU QUAN - *Etude électromagnétique et thermodynamique d'un fluide relativiste chargé*. Journ. rat. Mech., 5 (1956) p. 473-538.
- [45] E. SCHRÖDINGER - *The final affine laws*. Proc. Roy. Ir. Acad., 52 A (1948) p. 169.
- [46] E. SCHRÖDINGER - *On the differential identities of an affinity*. Proc. Roy. Ir. Acad., 54 A (1951) p. 79-85.
- [47] M. A. TONNELAT - *Résolution des équations fondamentales d'une théorie unitaire affine*. Comptes rendus Ac. Sc. Paris, 230 (1950) p. 182; 231 (1950) p. 470, 487 et 512; 232 (1951) p. 2407.
- [48] M.-A. TONNELAT - *Théorie unitaire affine du champ physique*. Journ. Phys. Rad., 12 (1951) p. 81-88.
- [49] M.-A. TONNELAT - *Compléments à la théorie unitaire des champs*. Journ. Phys. Rad., 13 (1952) p. 177-185.
- [50] M.-A. TONNELAT - *La solution générale des équations d'Einstein $g_{\mu\nu;e} = 0$* Journ. Phys. Rad., 16 (1955) p. 21-38.

TABLE DES MATIÈRES.

Introduction Pag. 1
Notations et symboles » 6

CHAPITRE I. — NOTIONS SUR L'AXIOMATIQUE DE LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE.

1 La variété espace-temps » 8
2 Orientations dans l'espace et dans le temps » 9
3 Temps et espace associés. Systèmes de coordonnées physiquement admissibles » 9
4 Le système des équations d'EINSTEIN » 10
5 Le tenseur d'impulsion-énergie et les identités de conservation » 12
6 Le problème de Cauchy » 13
7 Les coordonnées isothermes » 14
8 Modèle d'univers et Problèmes globaux » 16
9 Comportement asymptotique euclidien » 17
10 Champ quasi-galiléen » 18

CHAPITRE II. — LA DÉTERMINATION DES ÉQUATIONS DE MOUVEMENT BASÉE SUR L'EMPLOI DU CHAMP EXTÉRIEUR.

I. — Principe de la détermination des équations de mouvement.

11 Le flux du vecteur $\vec{S}_{(\alpha)}$ » 20
12 Lemme préliminaire » 23
13 Propriétés fondamentales du flux de $\vec{S}_{(\alpha)}$ » 25
14 Définition des équations de mouvement » 30
15 Application à la méthode d'Einstein, Infeld et Hoffmann. » 31
16 Rôle du tenseur d'impulsion-énergie et des équations du cas intérieur dans le problème du mouvement » 32
17 Expression de $S_{\alpha\beta}$ en coordonnées isothermes » 34

II. — Application à la relativité générale.

18 Expression générale des équations approchées du champ » 35
19 Propriété des potentiels de gravitation en première approximation » 38
20 Formule du potentiel newtonien » 39
21 Première approximation des équations du champ » 41
22 Equations newtoniennes de mouvement » 42
23 Deuxième approximation des équations du champ » 44
24 Equations de mouvement » 49
25 Influence de la masse » 53

CHAPITRE III. — LA THÉORIE DU CHAMP UNIFIÉ D'EINSTEIN-SCHRÖDINGER
ET QUELQUES-UNS DE SES DÉVELOPPEMENTS.

26 Définition d'une connexion affine	Pag. 56
27 Torsion et courbure d'une variété à connexion affine	» 57
28 Différentielle absolue et dérivée covariante dans une connexion affine	» 58
29 Formules en repères naturels de coordonnées locales	» 59

II. — *Les équations du champ unifié.*

30 La variété fondamentale	» 60
31 Le principe variationnel	» 61
32 Le problème de Cauchy	» 64

III. — *Interprétation possible des équations fondamentales.*

33 Les conditions d'isothermie dans le choix de la métrique	» 66
34 Le tenseur $q^{\alpha\beta}$ et sa signification	» 67
35 Décomposition du tenseur de Ricci. Forme rigoureuse des équations du champ	» 68

CHAPITRE IV. — EXTENSION DE LA MÉTHODE DES SINGULARITÉS À LA THÉORIE DU
CHAMP UNIFIÉ D'EINSTEIN-SCHRÖDINGER.

I. — *Principe de la méthode.*

36 Les termes linéaires dans la connexion affine	» 70
37 Etude de l'intégrale μ_{α}^k	» 71
38 Propriétés fondamentales de l'intégrale μ_{α}^k	» 73
39 Définition des équations de mouvement	» 77
40 Rôle joué par la partie antisymétrique du tenseur de Ricci dans le problème du mouvement	» 77

II. — *Première approximation des équations du champ et équations du mouvement.*

41 Les équations du champ	» 80
42 Expression approchée du tenseur de Ricci	» 82
43 Le potentiel électromagnétique dans le cas quasi-statique	» 84
44 La première approximation des équations du champ	» 86
45 Les équations de mouvement	» 88
46 Interprétation du résultat négatif. Discussion des possibilités laissées à la méthode	» 89

III. — Les équations du champ en seconde approximation.

47	Remarques sur la solution des équations relatives au champ symétrique	Pag.	90
48	Interprétation des champs antisymétriques	»	93

CHAPITRE V. — LES ÉQUATIONS APPROCHÉES DE LA THÉORIE D'EINSTEIN-SCHRÖDINGER
ET LE TENSEUR D'IMPULSION-ÉNERGIE.

49	Conditions de conservation pour le tenseur d'impulsion-énergie	»	96
50	Les équations rigoureuses des champ	»	100
51	Les équations approchées	»	101
52	Les équations électromagnétiques	»	103
53	Les équations de la gravitation	»	105
54	Introduction des coordonnées isothermes dans les équations approchées	»	107
55	Le tenseur d'énergie et les équations de mouvement	»	110
56	Conclusions générales	»	111
BIBLIOGRAPHIE			» 112

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

“ Les structures presque complexes et structures
subordonnées sur une variété différentiable ”.

VU ET APPROUVÉ :

Paris, le 26 mai 1957.

Le Doyen de la Faculté des Sciences

J. PÉRÈS

VU ET PERMIS D'IMPRIMER :

Le Recteur de l'Académie de Paris

JEAN SARRAILH

